Глава 3

Расширение языка, структуры

En second lieu, les deux mémoires sont courts et nullement proportionnés aux titres ; et puis il y a au moins autant de français que d'algèbre à tel point que l'imprimeur, quand on lui a porté les manuscrits, a cru de bonne foi que c'était une introduction ... Il eut été si facile encore de substituer successivement toutes les lettres de l'alphabet dans chaque équation, en les numérotant par ordre pour pouvoir reconnaitre à quelles combinaisons de lettres appartiennent les équations subséquentes ; ce qui eut multiplié indéfiniment le nombre d'équations, si l'on réfléchit qu'après l'alphabet latin, il y a encore l'alphabet grec, que celui-ci épuisé, il reste les caracréres allemands, que rien n'empêche de se servir des lettres syriaques, et au besoin des lettres chinoises! Il eut été si facile de transformer dix fois chaque phrase, en ayant soin de faire précéder chaque transformation du mot solennel théorème ...

E.G.

3.a Мультиотношения, реляционные структуры

Вместо одного единственного отношения можно рассматривать структуру, образованную конечным множеством отношений $R_1, \ldots, R_k$, арности соответственно $m_1, \ldots, m_k$ *с одним и тем же носителем* ; такая структура называется *мультиотношением* , последовательность арностей $m_1, \ldots, m_k$ *сигнатурой* (ещё говорят *тип подобия*) мультиотношения. При данном втором мультиотношении $(S_1, \ldots, S_k)$ той же сигнатуры с носителем F , *изоморфизмом* $(R_1, \ldots, R_k)$ на $(S_1, \ldots, S_k)$ называется отображение E на F , являющееся изоморфизмом R_1 на $S_1, \ldots, R_k$, на S_k . Так же как и для отношений определяется понятие расширения, вложения, локального изоморфизма, p-изоморфизма и т.д. Что касается языка мультиотношения, на этот раз нужно ввести k символов отношений, а не один, арности m_1 для обозначения $R_1, \ldots,$ арности m_k для обозначения R_k .

Добросовестный читатель без труда проверит, что *все* теоремы, доказанные до этого для отношений, верны и для мультиотношений.

Это не было настоящим обобщением; теперь сделаем более тонкий шаг, рассматривая *реляционные структуры* $\mathcal{R}$, образованные не обязательно конечным семейством отношений R_i арности m_i с одним и тем же носителем E. Список m_i арностей будет называться *сигнатурой* или *типом подобия* структуры; язык, связанный с типом подобия, содержит по одному символу для обозначения каждого отношения. Таким же образом как в предыдущем случае определяются понятия расширения, ограничения, изоморфизма, p-изоморфизма и т.п. между реляционными структурами одного типа подобия.

Но здесь появляется одно существенное изменение : если первая часть теоремы Фраиссе 2.2 остается верной, т.е. совершенно точно, что два p-эквивалентных кортежа удовлетворяют одним и тем же формулам кванторного ранга не превышающего p , то обратное уже нельзя доказать по той простой причине, что лемма 2.3, утверждающая, что существует лишь конечное число классов p-эквивалентности, ложна. Если захотим спасти это обратное утверждение, то необходимо ввести бесконечные конъюнкции и дизъюнкции в наши формулы, одним словом, ввести инфинитарный язык. Мы не ступим на этот путь и сохраним финитарный характер формул, с которым связаны очень существенные свойства компактности, которые будут показаны в следующей главе.

Итак, скажем *по определению* , что две структуры $\mathcal{R}$ и $\mathcal{J}$ одной сигнатуры элементарно эквивалентны, если на них выполняются одни и те же предложения; и если $\mathcal{J}$ – расширение $\mathcal{R}$, то *по определению* это расширение элементарно, если любой кортеж элементов из носителя $\mathcal{R}$ удовлетворяет одним и тем же формулам в $\mathcal{R}$ и в $\mathcal{J}$.

Как же быть, если мы дорожим обращением теоремы Фраиссе и локальными изоморфизмами ? Говорим, что $\mathcal{R}_1$ есть *обеднение* (не путать с ограничением) $\mathcal{R}$, если она структура с той же базой, полученная из $\mathcal{R}$ стиранием некоторых отношений; также говорят, что $\mathcal{R}$ *обогащение* – $\mathcal{R}_1$. Обогащение получается расширением языка, а расширение самой структуры – расширением носителя. И так как в формулу входит лишь конечное число элементов сигнатуры, то $\mathcal{R}$ и $\mathcal{J}$ элементарно эквивалентны, если для любой конечной части сигнатуры их соответствующие обеднения ω-эквивалентны.

Замечание. Иногда бывает удобным рассмотрение 0-арных отношений. Так как отображение из X в Y сопоставляет каждому элементу X единственный элемент из Y, всегда существует отображение $\varnothing$ в E , *независимо от того E – пустое или нет,* с пустым графиком, т.е. всегда существует 0-ка элементов E . Как следствие, всегда существуют два нульарных отношения с базой E : $\{\varnothing\}$ и $\varnothing$. Первое можно назвать *истиной*, вторую *ложью*. Напротив, если $m > 0$, не существует m-ок элементов пустого множества, значит существует единственное m-арное отношение с пустой базой, которое само есть $\varnothing$ (и мы часто повторяли, что $\varnothing$ есть всегда локальный изоморфизм между двумя m-арными отношениями при $m > 0$) .

Таким образом, в структуре символ нульарного отношения всегда интерпретируется либо истиной либо ложью. Эти нульарные отношения сами по себе не представляют большого интереса, но являются естественным вспомогательным инструментом исчисления: если формула, имеющая n свободных переменных, представляет некоторое n-арное отношение (множество n-ок, ей удовлетворяющих), то предложение представляет 0-арное отношение – истину или ложь.

3.b Функции

Если мы, например, хотим говорить о группе G как о реляционной структуре, то можно ввести символ тернарного отношения R для обозначения множества троек (x, y, z) таких, что z есть произведение x и y . Это отношение – функциональное относительно z , то есть оно удовлетворяет формуле $(\forall x)(\forall y)(\exists! z)R(x, y, z)$. Например, равенство $x = y^2zy$ выражается формулой $(\exists u)(\exists v)(R(y, y, u) \wedge R(z, y, v) \wedge R(u, v, x))$. Это обозначение значительно хуже обычного и кроме того, немного неестественно введение с помощью квантора такого единственного z , что $R(x, y, z)$.

Из-за этого обычно предпринимают особое рассмотрение функций, отказываясь от их систематической замены графиками (графиком m-местной функции будет некоторое $(m+1)$-местное отношение) . Теперь определим понятие *структуры* в самом общем смысле : *сигнатура*, или *тип подобия*, дается как множество, возможно пустое, *константных символов* c_i (также говорят *индивиды* вместо *констант*) , *символов* f_j *для функций* , где f_j – арности (арность = местность) m_j *и символов* r_k *для отношений* , где r_k – арности n_k (можно также рассматривать константы как 0-местные функции) .

Структура $\mathcal{J}$ сигнатуры σ и с носителем E задается сопоставлением каждому символу константы c_i из σ одного элемента из E , который его интерпретирует, каждому символу функции f_i некоторого отображения из E^{m_j} в E, каждому символу отношения r_k некоторое подмножество E^{n_k} . Часто смешивают константу, функцию, отношение с символами, которые они обозначают; если нужно уточнить структуру, к которой они относятся, можно обозначать через $c_i^{\mathcal{J}}, f_j^{\mathcal{J}}, r_k^{\mathcal{J}}$ интерпретации символов в структуре $\mathcal{J}$.

Сразу опишем язык, соответствующий данной сигнатуре; прежде чем образовать формулы, нужно образовать *термы* , обозначающие индивиды по следующим правилам :

- термы сложности 0 : переменные и константы,
- термы сложности $n+1$: слова вида $f(t_1, \ldots, t_m)$, где f – функциональный символ арности m , и где $t_1, \ldots, t_m$ – термы сложности не более n и хотя бы один из них имеет сложность n .

И что касается формул :

- атомные формулы или формулы сложности 0 : $t_1 = t_2$, $r(t_1, \ldots, t_m)$, где $t_1, \ldots, t_m$ – термы и r – символ m-арного отношения,
- формулы сложности $n+1$: $\neg f, (\exists x) f, (\forall x) f$, где f – формула сложности n ; $f \wedge g, f \vee g$, где f и g – формулы сложности не более n , хотя бы одна из которых имеет сложность n .

Множество подформул, свободных переменных в формуле, её кванторный ранг и т.д. определяются как и в случае языка одного отношения. Оставляем мужественному читателю проверку того, что существует теорема об однозначном чтении термов и формул, на которую опирается дальнейшее изложение.

Перейдем к интерпретации : если формула с n свободными переменными создается для обозначения подмножества E^n (n-ки из E , удовлетворяющие ей) , терм с n переменными создается для обозначения функции из E^n в E . Для терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и для n-ки $(a_1, \ldots, a_n)$ элементов из базы E структуры $\mathcal{J}$, элемент $t(a_1, \ldots, a_n)$ из E определяется индукцией по сложности t так :

- если $t = c_i$, то этот элемент есть $c_i^{\mathcal{J}}$; если $t = x_k$, то этот элемент есть a_k ,
- если $t(\bar{x}) = f(t_1(\bar{x}), \ldots, t_m(\bar{x}))$, то $t(\bar{a}) = f^{\mathcal{J}}(t_1(\bar{a}), \ldots, t_m(\bar{a}))$.

Определяем выполнимость атомной формулы на $\bar{a}$ следующим образом :

$$\mathcal{J} \vdash t_1(\bar{a}) = t_2(\bar{a}), \text{ если } t_1(\bar{a}) \text{ равен } t_2(\bar{a}) \text{ ;}$$

$$\mathcal{J} \vdash r(t_1(\bar{a}), \ldots, t_n(\bar{a})), \text{ если } (t_1(\bar{a}), \ldots, t_n(\bar{a})) \in r^{\mathcal{J}} \text{ .}$$

Для формул большей сложности поступаем так же, как и в случае одного отношения.

Мы говорим, что структура $\mathcal{J}'$ есть *ограничение* или *подструктура* $\mathcal{J}$, если :

- база E' структуры $\mathcal{J}'$ содержится в базе E структуры $\mathcal{J}$,
- для каждого константного символа $c_i, c_i^{\mathcal{J}'} = c_i^{\mathcal{J}} \in E'$,

- для каждого символа функции f_j, E' – множество, замкнутое относительно $f_j^{\mathcal{J}}$ и $f_j^{\mathcal{J}'}$ – ограничение $f_j^{\mathcal{J}}$ на E' ,

- для каждого символа отношения r_k, $r_k^{\mathcal{J}'}$ – ограничение $r_k^{\mathcal{J}}$ на E' .

Расширение *элементарно*, в записи $\mathcal{J}' \prec \mathcal{J}$, если каждый кортеж из меньшей структуры удовлетворяет одним и тем же формулам в меньшей и большей структурах. Обратим внимание на следующий факт: если мы аксиоматизируем понятие группы введя только одну бинарную функцию умножения, то подструктура группы не всегда является подгруппой, это просто множество, замкнутое относительно умножения. Если дополнительно введем константу для нейтрального элемента и унарную функцию для обращения, то мы получим нечто более богатое, поскольку мы меняем понятие подструктуры, хотя в языке с одним только умножением имеются синонимы: $x = x^2$ для $x = 1$ и $xy = xyxy$ для $x = y^{-1}$.

Если дано подмножество A носителя структуры $\mathcal{J}$, то подструктурой $\mathcal{J}$, *порожденной* A , является ограничение $\mathcal{J}$ на замыкание A относительно функций из $\mathcal{J}$ (включая константы, рассматриваемые как 0-местные функции). Структура называется *конечно порожденной* или *конечного типа* , если она обладает конечным множеством порождающих.

Изоморфизмом двух структур $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ одной и той же сигнатуры называется биекция s между их носителями E и E' , такая, что :

- $s(c^{\mathcal{J}}) = c^{\mathcal{J}'}$ для каждой константы c ,

- $s(f^{\mathcal{J}}(s^{-1}(b_1), \ldots, s^{-1}(b_n))) = f^{\mathcal{J}'}(b_1, \ldots, b_n)$ для каждой функции f ,

- $(a_1, \ldots, a_n) \in r^{\mathcal{J}} \iff (s(a_1), \ldots, s(a_n)) \in r^{\mathcal{J}'}$ для каждого отношения r .

Локальный изоморфизм из $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}'$ есть изоморфизм между ограничением конечного типа $\mathcal{J}$ и ограничением конечного типа $\mathcal{J}'$: сказать, что $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ локально изоморфны или 0-эквивалентны значит, что отображение переводящее a_1 на $b_1, \ldots a_n$ на b_n , продолжается единственным образом, до изоморфизма между подструктурами, порожденными этими кортежами; другими словами, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ удовлетворяют одним и тем же атомным формулам.

Мы определяем, как в случае языка одного отношения, понятие p-изоморфизма, где p – натуральное число или, в большей общности, ординал, и также без труда доказывается обобщение первой части теоремы Фраиссе, а именно, что *два p-эквивалентных кортежа удовлетворяют одним и тем же формулам кванторного ранга не выше p* . В частности, два p-эквивалентных и тем более ∞-эквивалентных кортежа имеют одинаковый тип.

Что касается обратного утверждения, которое опирается на лемму 2.3 ("число классов p-эквивалентности конечно") , её обобщение верно лишь для сигнатуры, состоящей из конечного числа констант и отношений. На самом деле, уже *только одна функция ненулевой арности* позволяет образовывать бесконечное число термов, и значит, бесконечное множество атомных формул.

Таким образом, если захотим несмотря ни на что свести элементарную эквивалентность к конечному "челноку" (что может быть необходимым в определенных деликатных случаях) , то нужно спуститься на конечную сигнатуру, и заменить каждую n-местную функцию её графиком, являющимся $n+1$-местным отношением. При этом сохраняется элементарная эквивалентность, но конечно меняется понятие атомной формулы, формулы кванторного ранга p, p-изоморфизма и т.д.

Но в большинстве случаев, действительно необходима лишь прямая теорема Фраиссе, которая всегда верна, и даже чаще применяются лишь ∞-изоморфизмы (смотрите главу 5) .

3.c Снова о теореме Левенгейма

Так как введенные структуры обобщают отношения из глав 1 и 2 , нам нужно понять как обобщаются доказанные там теоремы. Это мы уже обсудили для "челнока" Фраиссе. Без труда можно понять, что теорема 1.14 остается в силе: две ∞-эквивалентные структуры со счетными базами изоморфны. Эквивалентности с 1) до 21) из раздела 2.a остаются в силе так же, как и приведение к пренексной форме, целиком зависящее от них. Равным образом переносятся такие понятия, как модели, следствия, совместное множество предложений, теории полной теории (понятие теории или полной теории определяется относительно фиксированного языка) и т.п. из раздела 2.c. Тест Тарского 2.4 , теорема 2.6 о цепях элементарных расширений из раздела 2.d остаются верными; что касается теоремы Левенгейма, то она требует легкого видоизменения.

Мощностью языка L по определению называется число его формул : если L содержит конечное или счетное множество символов констант, функций и отношений, то это – счетная мощность, в записи $card(L) = \omega$; если L содержит бесконечное число $\varkappa$ таких символов, то $card(L) = \varkappa$. Очень часто, для теория T в языке L пишут бесцеремонно $card(T)$ вместо $card(L)$ (таким образом, $card(T)$ есть число формул языка теории T , а не число аксиом, участвующих в аксиоматизации T ; впрочем, это не так уж незаконно, поскольку $card(T)$ есть в действительности число теорем в T , а число тезисов в L совпадает в точности с $card(L)$!)

В доказательстве теоремы Левенгейма для одного отношения, мы использовали то обстоятельство, что число формул без параметров счетно и, следовательно, число формул с параметрами из A равно $Max(card(A), \omega)$; в общем случае этим числом будет $Max(card(A), card(L))$ и то же самое доказательство дает следующую теорему:

Теорема 3.1 (Левенгейм.) *Пусть $\mathcal{J}$ – структура в языке L , и пусть A – подмножество носителя этой структуры. Тогда существует элементарное ограничение структуры $\mathcal{J}'$, носитель которого содержит A , мощности не более $Max(card(A), card(L))$.*

Мы видим в частности, что каждая теория T имеет модель мощности не более чем $card(T)$.

3.d Исторические и библиографические примечания

Я не могу сказать что-нибудь по поводу этой короткой главы за исключением лишь того, что, как утверждают историки, появление структур восходит к Шредеру [ШРЁДЕР, 1895] ; слово "мультиотношение" происходит из [ФРАИССЕ, 1971/72/75] . Для остального отсылаем к замечаниям двух предыдущих глав.