Глава 6

Иллюстрации челночного метода

Lors fu li conseils des barons telx que il se heberg-eroient entre le palais de Blaquerne et le chastel Buimont, qui ere une abaîe close de murs. Et lors furent tendu li tref et li paveillon, et bien fu fiere chose a regarder : que de Costantinoble, qui tenoit III liues de front par devers la terre, ne pot tote l'ost assegier que l'unes des portes. ... Et mult estoient perillousement, que onques par tant poi de gent ne furent assegié tant de gent en nulle ville.

J. de V.

Пять примеров этой главы иллюстрируют метод, описанный в предыдущей главе; равным образом они служат как примеры для последующего материала этого курса. Автор не утверждает, что это самые значительные или плодотворные применения теории моделей в алгебре, или в других ветвях математики, и он признает, что выбрал именно те случаи, где "челночный" метод применим особенно хорошо.

6.a Алгебраически замкнутые поля

Под полем мы понимаем структуру с двумя бинарными операциями сложения и умножения, содержащую выделенные элементы, обозначаемые через 0 и 1 , и с отображением "перехода к противоположному" ($x \mapsto -x$). Таким образом, язык поля (чудное выражение!) состоит из двух символов констант, одного символа унарной функции и двух символов бинарных функций. Я оставляю читателю аксиоматизацию понятия поля в этом языке, не забывая аксиому $0 \neq 1$; отметим, что поскольку отображение $x \mapsto x^{-1}$ не включено в язык, подструктура поля не всегда будет полем, а кольцом.

Легко видеть, что каждому терму с переменными $x_1, \ldots, x_n$ соответствует многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами, который мы будем писать без скобок, ненужных из-за законов ассоциативности. Атомная формула имеет вид $P(\bar{x}) = Q(\bar{x})$, где P и Q – такие многочлены; её выгодно заменить на $P(\bar{x}) - Q(\bar{x}) = 0$. Итак, атомные формулы имеют вид $P(\bar{x}) = 0$, по этой причине их называют *равенствами* или *тождествами*, а их отрицания вида $P(\bar{x}) \neq 0$ – *неравенствами*. Следовательно, бескванторная формула является булевой комбинацией равенств, которую можно представить в виде дизъюнкции конъюнкций равенств и неравенств; часто конъюнкцию равенств и неравенств называют системой *равенств* и *неравенств*.

Как известно каждому, отображение кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел в поле K , которое n отображает на элемент $1 + 1 + \cdots + 1$ поля K , где сумма состоит из n единиц (можно обозначить этот элемент через n , символ n не вносится, честно говоря, в язык полей, это сокращение для $1+1+\cdots+1$), является гомоморфизмом колец. Поскольку его образ – целостное кольцо, его ядро – простой идеал, который равен либо $\{0\}$, в этом случае говорят, что K *характеристики ноль*, либо $p\mathbb{Z}$, где p – простое число, тогда говорят, что K *характеристики* p .

То, что K характеристики p , выражается единственной аксиомой $p = 0$; тогда мы знаем, что K – расширение поля F_p из p элементов. Чтобы выразить, что K характеристики ноль, необходимо бесконечное число аксиом : $p \neq 0$ для каждого p ; поскольку конечное число этих аксиом не влечет другие, теория полей характеристики p не является конечно аксиоматизируемой (смотрите раздел 4.b) ; заметим, между прочим, что снова по компактности, если предложение f теории полей имеет модели характеристики p для произвольно больших p (т.е. для бесконечного множества p), то она имеет модель характеристики ноль. Если K характеристики ноль, то оно расширение $\mathbb{Z}$, значит, также расширение $\mathbb{Q}$ его поля частных.

Для данного поля k и двух элементов a и b из полей, расширяющих k , мы говорим, что a и b k-подобны, если поля $k(a)$ и $k(b)$, порожденные ими, изоморфны *над* k , т.е. существует изоморфизм, оставляющий k поточечно неподвижным и переводящий a на b .

Как понять, что два элемента таковы ? Рассмотрим каноническую сюръекцию кольца $k[x]$ многочленов от одной переменной x с коэффициентами из k в кольцо $k[a]$, порожденное k и a , состоящую в замене переменной x в каждом многочлене на a , и её ядро $I_{a/k}$ называется *идеалом тождеств для* a *над* k; поскольку $k[a]$ целостно, то это – простой идеал и, наоборот, если I – простой, то он идеал тождеств образа x в $k[x]/I$, вложенного в своё поле частных. Если два элемента подобны, то они обнуляют одни и те же уравнения; и $I_{a/k}$ определяет $k[a]$, изоморфное $k[x]/I_{a/k}$, а также поле частных $k(a)$ кольца $k[a]$.

Класс подобия, таким образом, это простой идеал: два элемента подобны над $k \Longleftrightarrow$ они удовлетворяют одним и тем же уравнениям с коэффициентами в k , или ещё одним и тем же свободным формулам с коэффициентами из k .

Кольцо $k[x]$ евклидово и описание его идеалов – легкое, поскольку все они главные :

- если $I_{a/k} = 0$, то говорят, что a *трансцендентен* над k; $k[a]$ изоморфно $k[x]$ и $k(a)$ изоморфно полю $k(x)$ рациональных функций от одной переменной с коэффициентами в k ,

- иначе $I_{a/k}$ порождается неприводимым многочленом $P_{a/k}$ – *минимальным многочленом* a над k ; в этом случае говорят, что a *алгебраичен* над k , и тогда $k[a] = k(a) \simeq k[x]/P_{a/k}$.

Также известно, что поле k называется *алгебраически замкнутым*, если каждый многочлен от одной переменной отличный от константы и с коэффициентами из k имеет корень в k . Чтобы аксиоматизировать это понятие требуется бесконечный список аксиом (одна аксиома для каждой возможной степени многочлена) :

$$A_n \quad (\forall y_0)\dots(\forall y_{n-1})(\exists x)(x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \dots + y_1 x + y_0 = 0).$$

(Естественно, x^n – сокращение для $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$, означающего произведение n x-ов: в нашем языке нет никакого символа для возведения в степень).

Упражнение 6.1 1°) *Для каждого* p *постройте алгебраически незамкнутое поле характеристики* p , *удовлетворяющее* $A_1, \dots, A_n$ *(работайте в хорошо известных алгебраических расширениях* F_p *).*
2°) *Докажите, что существует поле характеристики* 0 *с этими же свойствами.*

Лемма 6.2 *Алгебраически замкнутое поле бесконечно.*

Доказательство. Многочлен $(x - a_1)\dots(x - a_n) + 1$ не имеет корней в списке $\{a_1, \dots, a_n\}$ □

Лемма 6.3 *Каждое поле имеет алгебраически замкнутое расширение.*

Доказательство. Пусть k – наше поле и K – расширение k и $P(x)$ – отличный от константы многочлен из $k[x]$; если $Q(x)$ – неприводимый делитель $P(x)$ в $k[x]$, то $k[x]/Q$ – расширение k , в котором $P(x)$ имеет корень.

После этого мы поступаем так: перенумеруем все многочлены P_α с коэффициентами из k ; неудобство для начинающих логиков, заключается в том, что если k несчетно, то мы не сможем пронумеровать эти многочлены натуральными числами, для этого необходимы ординалы. Не будем задерживаться на этом: начнем с добавления корня P_0 , получим поле K_0 , расширяющее k, в котором P_0 имеет корень; затем построим расширение K_1 поля K_0 , в котором P_1 имеет корень и т.д. Таким образом мы построим возрастающую последовательность K_α полей такую, что многочлен P_α имеет корень в K_α : пусть L_1 есть объединение всех K_α . Тогда L_1 – поле, расширяющее k , в котором каждый полином с коэффициентами из k и отличный от константы имеет корень. Если вы в данный момент чувствуете аллергию к трансфинитным конструкциям, предпочитая конечные рекуррентности, то для каждого конечного множества $F = \{P_1, \dots, P_n\}$ многочленов из $k[x]$ вы можете построить расширение L_F поля k , где каждый P_i имеет корень; затем соображения компактности дадут очевидное существование L_1 .

Повторяя этот процесс, построим возрастающую цепь $k = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots$ полей, такую, что каждый многочлен с коэффициентами из L_n имеет корень в L_{n+1} . Поле $L = \cup L_n$ является алгебраически замкнутым.

□

Теорема 6.4 *Теория алгебраически замкнутых полей допускает элиминацию кванторов: она является модельным пополнением теории полей и также теории целостных колец. Теория алгебраически замкнутых полей данной характеристики полна.*

Доказательство. Рассмотрим $\bar a$ и $\bar b$ в алгебраически замкнутых полях K и L , удовлетворяющие одним и тем же формулам без кванторов; мы хотим показать, что $\bar a$ и $\bar b$ одного типа; можно предполагать K и L ω-насыщенными, поскольку иначе, мы можем заменить K и L на их ω-насыщенные элементарные расширения, которые будут также алгебраически замкнутыми, поскольку это понятие – элементарное.

Теперь мы должны показать, что $\bar a$ и $\bar b$ ∞-эквивалентны; заметим, что K и L одной характеристики, так как предложения $p = 0$ и $p \neq 0$ бескванторные; это означает, на самом деле, что кольца, порожденные $\bar a$ и $\bar b$, как и поля k и h, порожденные $\bar a$ и $\bar b$, изоморфны (это – общий факт, что $\bar a$ и $\bar b$ удовлетворяют одним и тем же свободным формулам $\Longleftrightarrow$ они порождают изоморфные структуры!). Добавим теперь для определенности элемент α к $\bar a$; если α алгебраичен над k , то минимальный многочлен $P(x)$, преобразованный изоморфизмом переводящим $\bar a$ на $\bar b$, станет неприводимым полиномом из $h[x]$, который имеет корень β в алгебраически замкнутом поле L, и $k(\alpha)$, $k(\beta)$ изоморфны.

Теперь, если α трансцендентен над k, то мы должны доказать, что существует β в L, трансцендентный над h; однако, многочлен степени n имеет не более n корней в поле (поскольку, если a – корень $P(x)$, то $x - a$ делит $P(x)$), значит, если $Q_1(x), \dots, Q_s(x) \in h[x]$, то в силу бесконечности L (лемма 6.2), существует элемент в L , не являющийся корнем ни одного из этих многочленов; следовательно, множество всех формул $Q(x) \neq 0$, для $Q(x) \in h[x]$ и $Q \neq 0$, будучи конечно выполнимым в L , совместно с теорией поля L ; так как L ω-насыщенно и все параметры этих формул лежат в $\bar{b}$, оно реализуется некоторым элементом β из L .

Итак, мы доказали, что теория T алгебраически замкнутых полей элиминирует кванторы; значит, она является модельным пополнением всех своих компаньонов, в частности, теория $T_\forall$ для T совпадает с теорией целостных колец; действительно, с одной стороны, все её аксиомы универсальны, с другой стороны, каждое целостное кольцо погружается в алгебраически замкнутое поле (теория полей в языке $(0, 1, -, +, \cdot)$ не универсальна: чтобы выразить существование обратного элемента необходима $\forall\exists$-аксиома) .

Для последнего пункта, $\emptyset$ удовлетворяет одним и тем же предложениям без кванторов в K и L $\Longleftrightarrow$ оно порождает в K и L изоморфные подструктуры; это имеет место $\Longleftrightarrow$ характеристики K и L совпадают.

$\square$

Замечание. 1° Мы имеем пример неполной теории, элиминирующей кванторы; это вызывает необходимость присутствия в языке константных символов или 0-арных отношений, поскольку иначе кортежи $\emptyset$ в двух L-структурах удовлетворяют одним и тем же бескванторным предложениям (или ещё : порождают изоморфные подструктуры) .
2° Так как элиминация кванторов только лишь вопрос языка, нужно быть очень точным когда речь идет о языке, служащим аксиоматизации интересующих нас структур: здесь им был $(0, 1, -, +, \cdot)$; мы видим, что язык $(+, \cdot)$ достаточен для аксиоматизации понятия алгебраически замкнутого поля, так как 0 и 1 определяются формулами с помощью сложения и умножения, но не для элиминации кванторов. Если, в противоположность этому, мы добавим к $(0, 1, -, +, \cdot)$ символ унарной функции i для отображения переводящего 0 на 0, а любой отличный от нуля элемент на его обратный, то этим модифицируем понятие подструктуры (которая теперь становится подполем, а не подкольцом), но мы не вводим в действительности новых формул без квантора, поскольку отношение $y = i(x)$ определяется в языке $(0, 1, -, +, \cdot)$ следующей формулой без квантора $x = y = 0 \vee xy = 1$.

Как непосредственное следствие теоремы 6.4 получаем следующую фундаментальную теорему алгебраической геометрии:

Теорема 6.5 (Гильберта о нулях) *Если (конечная!) система S равенств и неравенств от многих переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля k имеет решение в некотором поле K , расширяющем k , то она имеет решение в произвольном алгебраически замкнутом расширении k .*

Доказательство. Пусть L – алгебраически замкнутое поле, содержащее k, и K_1 – алгебраически замкнутое расширение K. Имеем $K_1 \vdash (\exists\bar{x})S(\bar{x})$ и это последнее предложение имеет параметры только из k , поэтому по свойству модельного пополнения $L \vdash (\exists\bar{x})S(\bar{x})$.

$\square$

Замечание. Определение алгебраически замкнутого поля – это практически теорема о нулях для системы от одной переменной.

Хорошо известно, что поле k имеет минимальное алгебраически замкнутое расширение – его алгебраическое замыкание, которое единственно с точностью до k-изоморфизма; мы собираемся доказать этот результат, обобщая его в рамках теории моделей.

Пусть A – множество параметров из модели M полной теории T ; элемент a из M называется *алгебраическим* над A , если существует формула $f(x)$ с параметрами из A , выполняющаяся на a и, которая удовлетворяется лишь конечным числом элементов из M (говорят, что формула $f(x)$ *алгебраизирует a*) . Например, если a лежит в A , то формула $x = a$ её алгебраизует. Если $A, B \subset M$, то говорят, что B *алгебраично* над A , если каждый элемент B алгебраичен над A ; наконец, если все элементы M , алгебраичные над A , принадлежат A , то говорят, что A *алгебраически замкнуто в M*. (Будьте осторожны: некоторые горе-специалисты теории моделей используют этот термин в совершенно другом смысле в связи с модельным пополнением.)

Лемма 6.6 *Если $A \subset B \subset C \subset M$, B алгебраично над A и C алгебраично над B , то C алгебраично над A .*

Доказательство. Пусть c из C и $f(x, b_1, \ldots, b_m)$ – формула с параметрами из B , алгебраизирующая c над B и имеющая только n решений в M, и $f_1(y), \ldots, f_m(y)$ – формулы с параметрами из A , алгебраизирующие соответственно $b_1, \ldots, b_m$ над A. Тогда формула $(\exists y_1)\ldots(\exists y_m)(f_1(y_1) \wedge \ldots f_m(y_m) \wedge f(x, y_1, \ldots, y_m) \wedge \neg((\exists x_0)\ldots(\exists x_n)(\bigwedge_{0 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{0 \le i \le n} f(x_i, y_1, \ldots, y_m))))$ алгебраизирует c над A .

$\square$

Одним из следствий леммы 6.6 является то, что множество $\bar{A}_M$ элементов из M , алгебраических над A , алгебраически замкнуто в M : это – самое маленькое алгебраически замкнутое надмножество A, и единственное такое, алгебраичное над A. Оно называется *алгебраическим замыканием A в M*.

На самом деле оно не зависит от модели M , что позволяет определить понятие алгебраического замыкания $\bar{A}$ множества A без упоминания M ; действительно, пусть N – другая модель T , содержащая A , т.е. модель $T(A)$. Как модели теории $T(A)$ M и N имеют общее элементарное расширение P ; если f – алгебраическая формула с параметрами в A , то тот факт, что существует n элементов удовлетворяющих f , записывается одним предложением, истинным как в M , так и в P ; это влечет, что все такие элементы лежат уже в M и нет нового в P . Значит, $\bar{A}_P = \bar{A}_M$ и по той же причине $\bar{A}_P = \bar{A}_N$.

Если сказать больше, то элементарные вложения M и N в P индуцируют биекцию s между $\bar{A}_M$ и $\bar{A}_N$, которая кроме того сохраняет выполнимость формул: если $\bar{a} \in \bar{A}_M$, то $M \vdash g(\bar{a}) \iff N \vdash g(s\bar{a})$.

Предположим теперь, что T – теория алгебраически замкнутых полей данной характеристики. Тогда имеет место исключительный факт : для любого $A \subset M$ (M – модель T, значит, алгебраически замкнутое поле) $\bar{A}$ само является моделью T , т.е. алгебраически замкнутым полем (обратите внимание на игру слов!) .

Действительно, $a+b, a, b, 0, 1, -a, a^{-1}$ алгебраичны над $\{a,b\}$, значит, $\bar{A}$ – поле; и если P – отличный от константы многочлен из $\bar{A}[x]$, он имеет корень в M, являющейся моделью T, и поскольку a алгебраизируется над $\bar{A}$ формулой $P(x) = 0$, то он лежит в $\bar{A}$; таким образом, это последнее множество – по-настоящему алгебраически замкнутое (в алгебраическом смысле, а не теоретико-модельном!) поле, т.е. модель T .

Множество $\bar{A}$ есть то, что называется *простой моделью* над A : для любой модели M теории T , содержащей A , существует (элементарное) вложение $\bar{A}$ в M . Она имеет дополнительное свойство, что все вложения $\bar{A}$ имеют один и тот же образ $\bar{A}_M$. Это, очевидно, единственная модель, содержащая A и имеющая данное свойство простоты, поскольку, если $A \subset K \subsetneq \bar{A}$, то K не может быть алгебраически замкнутым полем (иначе расширение $K \subset \bar{A}$ было бы элементарным и $\bar{A}_K = \bar{A}$).

Поскольку вы знаете зачатки теории полей, а может быть больше, вы определенно удивились непосредственной манере, с которой теоретик моделей берется за проблему : мы смогли развернуть панораму теории алгебраически замкнутых не говоря о степени трансцендентности, о базе трансцендентности расширения поля. Естественно, в последующем изложении мы предполагаем, что вы хорошо знакомы с этими понятиями: если здесь у вас пробелы в знании, то загляните в ближайший учебник по элементарной алгебре[1] .

Кстати, что за пространства типов будут соответствовать теории алгебраически замкнутых полей данной характеристики ? Возьмем в качестве параметров поле K (поскольку, если K – поле, порожденное A , то $S_n(K)$ и $S_n(A)$ идентичны). Тогда $S_n(K)$ – множество простых идеалов кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных, снабженное топологией, порожденной базой открыто-замкнутых множеств вида $\langle P(\bar{x}) = 0\rangle = \{I : I \vdash P = 0\} = \{I : P \in I\}$. Это – то, что геометры называют *конструктивной топологией*

Геометры, утонченность которых общеизвестна, работают в *топологии Зарисского* $Z_n(K)$, определенной на том же множестве простых идеалов, база *замкнутых* множеств которой образована из $\langle P(\bar{x}) = 0\rangle$, а база *открытых* множеств – из $\langle P(\bar{x}) \neq 0\rangle$. Это не сепарабельное пространство, нетерово (каждая убывающая цепь замкнутых множеств стабилизируется), с немножко необычными свойствами. И естественно, поскольку топология $Z_n(K)$ слабее, чем $S_n(K)$, теоремы, доказанные по поводу $Z_n(K)$, более тонкие и более специфичные, чем теоремы о $S_n(K)$.

Теоретики моделей, как люди скромные, предпочитают работать во вполне несвязном компакте, в самых симпатичных среди топологических пространств, после конечных дискретных пространств.

Упражнение 6.7 *Формализуйте теорию T алгебраически замкнутых полей в языке $(0, 1, +, \cdot)$ и докажите, что она имеет элиминацию кванторов. Какой будет будет теория $T_\forall$?*

[1]имеется ввиду учебник алгебры для 1-го и 2-го курса университетов

6.b Дифференциально замкнутые поля

Когда Галуа говорил о корнях уравнения, он имел ввиду комплексные числа, и только спустя долгое время после него алгебраисты начали рассматривать другие поля кроме подполей $\mathbb{C}$: сама природа очень любезно предоставила в распоряжение математиков алгебраически замкнутое поле. (Я не хочу сказать, что это поле было дано математикам изначально, какое-то время они потратили на понимание "мнимых решений" их уравнений, а хочу лишь сказать, что они знали его даже до возникновения понятия алгебраически замкнутого поля.) Но когда речь шла в конце предыдущего столетия о построении теории аналогичной теории Галуа, но касательно дифференциальных уравнений, натолкнулись на следующую проблему: какую область следует выбрать для того, чтобы иметь достаточно решений для дифференциальных уравнений ? Вот это важный вклад теории моделей в алгебру, так как она сумела ответить на этот вопрос понятием дифференциально замкнутого поля, которое является для дифференциальных уравнений тем же, что алгебраически замкнутые поля для алгебраических уравнений, т.е. область, где дифференциальное уравнение имеет столько решений сколько можно от них ожидать. Не существует естественного примера дифференциально замкнутых полей.

Пусть A – коммутативное кольцо; *производная* – это отображение d множества A в себя, такое, что для любых x, y из A справедливо

$$d(x+y) = dx + dy, \quad d(xy) = xdy + ydx$$

Дифференциальное кольцо – это кольцо с производной; если оно является полем, то говорят о *дифференциальном поле*. Элементы с нулевой производной называются константами; они образуют подкольцо A , которое будет полем, если A поле (и в частности, $d1 = 0$) . Легко проверить, что если A – целостное кольцо, то любая производная A продолжается единственным образом на его поле частных по правилу $d(x/y) = (ydx - xdy)/y^2$.

Язык дифференциальных полей это язык поля, обогащенный одним символом унарной функции для обозначения производной : $(0, 1, -, d, +, \cdot)$. Однако, обычно обозначают dx через x' , $d(dx)$ через $x'', \ldots, d(d(\ldots(dx)\ldots))$ через $x^{(n)}$, где n – кратность дифференцирования.

Примеры дифференциальных полей :

- если K – поле, то его превращают в поле констант, полагая производную тождественным нулем,
- если K – поле, то снабжают $K(x)$ формальной производной $\partial R(x)/\partial x$ рациональных функций,
- поле формальных серий $K((x))$ с его обычной производной,
- поле мероморфных функций над связной открытой областью комплексной плоскости.

Начиная с этого места, мы рассматриваем только дифференциальные поля характеристики нуль.

Для данного дифференциального поля K мы определяем дифференциальное кольцо $K[x]_d$ дифференциальных многочленов от одной переменной с коэффициентами из поля K следующим образом. Как кольцо оно кольцо $K[x, x', x'', \ldots, x^{(n)}, \ldots]$ с бесконечным числом переменных, которые обозначаем так: $x = x^{(0)}$, $x' = x^{(1)}$, $x'' = x^{(2)}, \ldots$, $x^{(n)}$, $x^{(n+1)}, \ldots$. Поскольку, каждое кольцо многочленов с коэффициентами из поля *факториально* , то каждый его элемент однозначно разлагается в произведение неприводимых элементов. Мы определяем на нем производную, продолжая производную на K , так что производная от $x^{(n)}$ есть $x^{(n+1)}$.

В других терминах, если $P(x)$ лежит в $K[x]_d$, то

$$P(x)' = P^*(x) + \sum x^{(n+1)} \frac{\partial P}{\partial x^{(n)}} \ ,$$

где P^* – многочлен, полученный из P , дифференцированием его коэффициентов (не забывайте P^* : элементы из K не являются обязательно константами!) и где $\partial P / \partial x^{(n)}$ обозначает частную производную в обычном смысле относительно переменной $x^{(n)}$.

Если P – многочлен, не лежащий в K (я не смею говорить : многочлен отличный от константы!), то по определению его *порядок* – наибольшее n, такое, что $x^{(n)}$ в нем присутствует : например, многочлен P второго порядка – это многочлен от x, x', x'' ; многочлен порядка 0 – это многочлен от x . И снова по определению его *сепарант* есть $S(P) = \partial P / \partial x^{(n)}$, где n – его порядок: *из-за нулевой характеристики , $S(P)$ всегда отличен от нулевого многочлена.*

Как мы сделали в случае полей, для данного дифференциального поля K и дифференциального поля L , расширяющего K , а также элемента a из L мы собираемся найти то, что определяет с точностью до K-изоморфизма дифференциальное поле $K(a)_d$ порожденное K и a . Для этого рассмотрим отображение $K(x)_d$ в L , состоящее в замене x на a : его образ является дифференциальным кольцом порожденным a и K . Его ядро есть идеал I_a дифференциальных уравнений над K , выполняющихся на a : это – простой идеал, поскольку $K[a]_d$ целостно, и он замкнут относительно производной (если $p \in I_a$, то $p' \in I_a$); он называется *простым дифференциальным идеалом.* Идеал I_a определяет $K(a)_d$ с точностью до изоморфизма, так как последнее поле является полем частных кольца $K[a]_d$, снабженное единственной производной, продолжающей производную на $K[a]_d$. И наоборот, нетрудно видеть, что произвольный дифференциальный идеал I определяет простое расширение поля K – поле частных кольца $K[x]_d / I$. Значит, нам нужно дать описание простых дифференциальных идеалов $K[x]_d$: это – цель следующих лемм.

Обозначим через (P) дифференциальный идеал, порожденный многочленом P , который является идеалом в обычном смысле, порожденным P и его последовательными производными $P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$; обозначим через $I(P)$ множество дифференциальных многочленов Q таких, что для достаточно большого k $S(P)^k Q$ принадлежит (P); тогда $I(P)$ – дифференциальный идеал: если $S(P)^k Q \in (P)$, то $S(P)^k Q' + k S(P)' S(P)^{k-1} Q \in (P)$ и $S(P)^{k+1} Q' \in (P)$.

Лемма 6.8 *Если P – неприводимый многочлен порядка n , то (P) не содержит многочленов порядка, меньшего, чем n ; и если Q имеет порядок n и лежит в (P) , то P делит Q . Тот же результат верен и для $I(P)$.*

Доказательство. Пусть $Q \in (P)$ порядка не больше n и $Q = A_0P + A_1P' + \cdots + A_kP^{(k)}$; продифференцировав P k раз, мы получим равенство $P^{(k)} = S(P)x^{(n+k)} + P_k(x, \ldots, x^{(n+k-1)})$, где P_k – многочлен только от $x, \ldots, x^{(n+k-1)}$; если в полиномиальном тождестве $Q = A_0P + A_1P' + \cdots + A_kP^{(k)}$ мы заменим неизвестное $x^{(n+k)}$ на рациональную дробь $-P_k/S(P)$ ($S(P)$ не нуль!), мы получим равенство между рациональными дробями; левая часть, не содержащая $x^{(n+k)}$, не изменится и умножая обе части на нужную степень $S(P)$, мы избавимся от знаменателей и получим полиномиальное равенство такого вида : $S(P)^hQ = B_0P + \cdots + B_{k-1}P^{(k-1)}$.

Повторяя эту процедуру k раз, мы получим равенство $S(P)^mQ = AP$. Однако степень $x^{(n)}$ в $S(P)$ меньше, чем её степень в P, и P не может делить $S(P)$; так как он неприводим, он должен делить Q . В случае идеала $I(P)$ P делит $S(P)^mQ$ тогда и только тогда, когда он делит Q .

□

Упражнение 6.9 *Докажите, что даже если P приводим и его порядок равен n , то (P) не содержит многочленов порядка, меньшего n.*

Лемма 6.10 *Если P – неприводимый многочлен порядка n, то $I(P)$ – простой дифференциальный идеал.*

Доказательство. Как понять, что Q лежит в $I(P)$? Если как в доказательстве леммы 6.8 , мы заменим $x^{(n+k)}$ на $-P_k/S(P)$, начиная с самой высшей производной x , присутствующей в Q , затем умножая на подходящую степень $S(P)$, чтобы избавиться от дробности, и повторять это, то в итоге мы получим многочлен Q_1 порядка не больше n, такой, что для некоторого h многочлены Q_1 и $S(P)^hQ$ конгруэнтны по модулю (P) .

Следовательно, Q лежит в $I(P)$ тогда и только тогда, когда для достаточно большого m $S(P)^mQ_1$ лежит в (P) , это включение означает, что P делит Q_1 . Вследствие этого, если $UV \in I(P)$, то P делит $(UV)_1 = U_1V_1$ или ещё, что либо P делит U_1 , либо P делит V_1 .

□

Лемма 6.11 *Каждый простой дифференциальный идеал имеет вид $I(P)$, где P неприводим.*

Доказательство. Пусть I – ненулевой простой дифференциальный идеал; выберем в I ненулевые многочлены минимального порядка n , затем среди них – минимальной степени по $x^{(n)}$ и, наконец, среди последних – многочлен P минимальной общей степени. Так как I – простой, очевидно, P неприводим: я хочу доказать, что $I = I(P)$.

Пусть Q лежит в $I(P)$ и $S(P)^mQ \in (P) \subset I$; многочлен $S(P)$, имея степень по $x^{(n)}$ меньше, чем степень P по $x^{(n)}$, не может принадлежать I ; так как I – простой, Q принадлежит I .

Пусть Q лежит в I ; с помощью метода, описанного в предыдущей лемме, начнем с образования многочлена Q_1 порядка $\leq n$, такого, что $S(P)^m Q$ и Q_1 конгруэнтны по модулю (P) . Рассмотрим Q_1 и P как многочлены от переменной $x^{(n)}$ и выполним евклидово деление Q_1 на P ; чтобы в равенстве, полученном таким образом, избавиться от дробей, нужно его умножить на некоторую степень главного коэффициента M в P, являющегося многочленом от $x, \ldots, x^{(n-1)}$, и получить многочлен R_1 степени по $x^{(n)}$, меньшей, чем степень P по $x^{(n)}$, такой, что $M^k Q_1 = AP + R_1$. Так как Q_1, P и R_1 лежат в I ,то должно быть $R_1 = 0$ по минимальности выбора P . Так как P не может делить свой коэффициент, P делит Q_1 , значит, Q лежит в $I(P)$.

□

Таким образом, мы видим, что простой дифференциальный идеал определяется "минимальным многочленом" P ; $I(P)$ вообще говоря не совпадает ни с идеалом, порожденным P , ни даже с радикальным (дифференциальным) идеалом, порожденным P, и связь, которая объединяет простой идеал с его минимальным многочленом более тонка, чем в случае обычных полей (проблема нахождения образующих для $I(P)$ в качестве радикального дифференциального идеала называется "проблемой Ритта" ; известны лишь её очень фрагментарные решения). Чтобы упростить формулировки теорем, договоримся, что минимальный многочлен нулевого идеала – мифическое существо порядка ω и с сепарантом 1 . *Рангом размерности* простого дифференциального идеала $I(P)$ называется порядок $RD(I(P))$ его минимального многочлена.

Лемма 6.12 *Степень трансцендентности расширения поля $K(a)_d/K$ равна $RD(I_{a/k})$.*

Доказательство. Если $I_{a/K} = 0$ (в этом случае говорят, что a дифференциально трансцендентен над K) , то a и его последовательные производные образуют базу трансцендентности $K(a)_d/K$. Иначе пусть n – наибольшее натуральное число, такое, что $a, \ldots, a^{(n-1)}$ алгебраически независимы над K : n – порядок минимального многочлена P элемента a над K . Поскольку $0 = P^{(k)}(a) = S(P)(a)a^{(n+k)} + P_k(a, \ldots, a^{(n+k-1)})$ и $S(P)(a) \neq 0$, то $a^{(n+k)}$ выражается через производные a низшего порядка, и $a, \ldots, a^{(n-1)}$ образуют базу трансцендентности для $K(a)_d/K$.

□

Лемма 6.13 *Пусть P – неприводимый многочлен порядка n ; каждый простой дифференциальный идеал, содержащий P , но не равный $I(P)$, имеет ранг RD, меньший, чем n.*

Доказательство. Пусть $I(Q)$ – простой дифференциальный идеал, содержащий P и имеющий ранг размерности n. Имеем $S(Q)^m P \in (Q)$, по лемме 6.8 это означает, что Q делит P ; так как они – неприводимые многочлены, то $P = Q$ (с точностью до обратимого элемента K).

□

Теперь мы собираемся исследовать, что произойдет с нашими идеалами при расширении $K \subset L$ дифференциальных полей; простой идеал J в $L[x]_d$

называется *сыном* простого идеала I в $K[x]_d$, если $I = J \cap K[x]_d$. Так как неприводимый в $K[x]_d$ многочлен P может также рассматриваться как многочлен из $L[x]_d$, мы теперь обозначаем через $I(P, K)$ простой идеал в $K[x]_d$ с минимальным многочленом P .

Неприводимый в $K[x]_d$ многочлен P может , быть разложен на множители в $L[x]_d$. Окончательно неприводимые делители P_i получаются когда мы переходим к алгебраическому замыканию $\bar{K}$ поля K (можно проверить, если хотите, но это следствие следующей леммы, что производная на K продолжается однозначно на $\bar{K}$; конечно для этого существенно, что характеристика рассматриваемых полей равна 0). Действительно по теореме 6.5 о нулях многочлен (от многих переменных!), неприводимый над алгебраически замкнутым полем, остается таковым над любым расширением этого поля; элементарные рассуждения из теории Галуа показывают, что все эти делители – простые и сопряжены K-автоморфизмами поля $\bar{K}$; действительно, если P_i – один из них, то обозначим через Q произведение всех сопряженных с ним, которое инвариантно относительно всех K-автоморфизмов поля $\bar{K}$: так как его характеристика равна нулю, то это многочлен с коэффициентами из K, делящий P и, значит, равный ему.

Лемма 6.14 *Пусть $K \subset L$ – расширение дифференциального поля, P – неприводимый многочлен в $K[x]_d$ и P_1 – неприводимый делитель P в $L[x]_d$. Тогда $I(P_1, L)$ – сын $I(P, K)$.*

Доказательство. Пусть $Q \in K[x]_d$. Предположим сначала, что Q лежит в $I(P, K)$ и $S(P)^m Q \in (P)$; перейдем к L : $P = AP_1$, где P_1 не делит A, поскольку это – простой делитель P ; так как $S(P) = AS(P_1) + \partial A/\partial x^{(n)} P_1$, $S(P_1)^m A^m Q \in (P_1)$ и ещё $A^m Q \in I(P_1, L)$; так как A не лежит в $I(P_1, L)$ (лемма 6.8) и этот идеал – простой, то $Q \in I(P_1, L)$.

Теперь предположим, что Q в $I(P_1, L)$; оставаясь внутри K , мы найдем многочлен Q_1 порядка не больше n, такой, что $S(P)^m Q$ и Q_1 конгруэнтны по модулю (P) и, значит, Q_1 – элемент из $I(P_1, L)$; так как его порядок не превышает n , то он делится на P_1 и поскольку его коэффициенты из K , то он делится на все элементы, сопряженные с P_1 в $\bar{K}$, а также на их произведение в силу их неприводимости; значит, Q_1 делится на P , откуда Q лежит в $I(P, L)$. □

В частности, мы видим, что каждый простой дифференциальный идеал имеет сыновей и эти сыновья с тем же рангом RD , что очевидно по лемме 6.14, называются *сыновьями без отклонения.*

Теперь мы можем приступить к понятию дифференциально замкнутого поля; чтобы упростить себе жизнь, мы рассматриваем ненулевые элементы поля K как дифференциальные многочлены порядка -1 .

Дифференциальное поле K характеристики нуль называется *дифференциально замкнутым*, если оно имеет следующее свойство: каждая система, образованная из одного дифференциального уравнения порядка $n \geq 0$ и одного дифференциального неравенства порядка $m < n$ от одной переменной x и с коэффициентами из K, имеет решение в K . Дифференциальная замкнутость дифференциального поля выражается следующим бесконечным списком аксиом :

$$(\forall y_1 \dots y_n)(\forall z_1 \dots z_m)(\exists x)(P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0) \ ,$$

где y_i – коэффициенты многочлена P порядка n (один из главных коэффициентов равен 1 , чтобы гарантировать порядок n многочлену), b_j – коэффициенты многочлена Q порядка $m < n$ (с теми же условиями): нужно по одной аксиоме для каждой возможной общей степени для P и Q . Учитывая соглашение принятое выше, имеем совместную систему $P(x) = 0 \wedge 1 \neq 0$, где $P(x)$ – дифференциальный многочлен порядка 0 , т.е. обычный многочлен, так что дифференциально замкнутое поле, в частности, алгебраически замкнуто.

Теорема 6.15 *Каждое дифференциальное поле вкладывается в некоторое дифференциально замкнутое поле.*

Доказательство. Пусть K – произвольное дифференциальное поле и $(P_0, Q_0), \dots, (P_\alpha, Q_\alpha), \dots$ – ординальная нумерация всех систем от двух многочленов из $K[x]_d$, где порядок Q_α меньше порядка P_α .

Допустим, что U_0 – неприводимый делитель P_0 в $K[x]_d$ того же порядка что P_0 и K_0 – расширение K, содержащее элемент a_0, такой, что $I_{a_0/K} = I(U_0)$; по лемме 6.8 Q_0 не лежит в $I(U_0)$ и a_0 – решение системы $P_0(x) = 0 \wedge Q_0(x) \neq 0$. Далее рассмотрим неприводимый делитель U_1 для P_1 в $K_0[x]_d$ того же порядка что и P_1 и мы добавляем элемент a_1, идеал тождеств над K_0 которого равен $I(U_1, K_0)$. И повторяя такую процедуру, в конце концов мы получим расширение L_1 поля K , в котором все системы с коэффициентами из K имеют решение; затем построим цепочку $K \subset L_1 \subset \dots \subset L_n \subset L_{n+1} \subset \dots$, такую, что все системы с коэффициентами из L_n имеют решение в L_{n+1} . Предел полей L_n является дифференциально замкнутым расширением K .

$\square$

Теорема 6.16 *Теория дифференциально замкнутых полей (характеристики нуль) полна и имеет элиминацию кванторов.*

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из дифференциально замкнутых полей K и L , которые предполагаются ω-насыщенными и пусть они порождают изоморфные дифференциальные подполя k и h. Мы должны доказать, что $(K, \bar{a})$ и $(L, \bar{b})$ ∞-изоморфны. (Замечание: в нашем языке удовлетворять одним и тем же формулам означает породить изоморфные дифференциальные кольца, и что эквивалентно, породить изоморфные дифференциальные поля).

Добавим, например, α к $\bar{a}$; пусть P – минимальный многочлен α над k, и Q – дифференциальный многочлен, полученный переносом P на h изоморфизмом: Q также неприводим; так как L дифференциально замкнуто, то для данного конечного множества $Q_1, \dots, Q_s$ дифференциальных многочленов, отличных от нуля и имеющих меньший порядок чем Q, существует элемент из L, удовлетворяющий системе $Q = 0 \wedge Q_1 \cdot Q_2 \cdot \dots \cdot Q_s \neq 0$. По компактности будет совместным с теорией L также существование элемента β, такого, что $Q(\beta) = 0$ и $Q_i(\beta) \neq 0$ для любого многочлена $Q_i \neq 0$ из $h[x]_d$ порядка, меньшего, чем порядок Q ; так как L ω-насыщенно, такой β существует в L . По лемме 6.13 $I_{\beta/h} = I(Q,h)$ и $k(\alpha)_d$ и $h(\beta)_d$ изоморфны.

$\square$

Теорема 6.17 (о дифференциальных нулях) *Пусть K – дифференциальное поле (характеристики нуль) и S – (конечная) система дифференциальных равенств и неравенств от многих переменных, имеющая решение в некотором расширении L поля K ; тогда S имеет решение в любом дифференциально замкнутом расширении K .*

Доказательство. Эта теорема доказывается так же, как теорема 6.5.

$\square$

Теперь возникает вопрос о существовании *дифференциального замыкания* данного дифференциального поля K, т.е. дифференциально замкнутого поля $\bar{K}$, такого, что любое вложение K в дифференциально замкнутое поле продолжается до $\bar{K}$.

Мы покажем, что K действительно обладает таким замыканием: это частный случай доказательства существования простых моделей для тотально трансцендентных теорий, которые будут в последующем изучены очень детально (смотри главу 18) .

Для теории T дифференциально замкнутых полей, пространство $S_1(K)$ совпадает с пространством простых дифференциальных идеалов в $K[x]_d$, топология которой порождается базисом открыто-замкнутых множеств вида $\langle P = 0\rangle = \{I : I \in S_1(K) \text{ и } P \in I\}$.

Когда тип *изолирован* в этой топологии ? (Ещё говорят, что соответствующий идеал ограничен) . Лемма 6.13 утверждает, что $\langle P = 0\rangle$ изолирует $I(P)$ от типов, имеющих больший RD-ранг и, значит, окрестность, изолирующую $I(P)$, можно выбрать в виде $\langle P = 0 \wedge Q_1 \neq 0 \wedge \cdots \wedge Q_s \neq 0\rangle$, где Q_i имеют меньший порядок, чем P, и ещё, заменив Q_i на их произведение Q, в виде $\langle P = 0 \wedge Q \neq 0\rangle$. Другими словами, $I(P)$ изолирован тогда и только тогда, когда существует Q, порядок которого меньше, чем порядок P, и $I(P)$ – единственный дифференциальный идеал, содержащий P и не содержащий Q . Мы видим, что по определению (и это согласуется с главой 5) дифференциально замкнутое расширение $\bar{K}$ реализует все изолированные типы над K .

Лемма 6.18 *Изолированные типы образуют плотное множество в $S_1(K)$.*

Доказательство. Пусть f – формула с параметрами из K , определяющая непустое открыто-замкнутое множество $S_1(K)$, и p из $\langle f\rangle$, имеющий минимальный RD-ранг и минимальный многочлен P . Тип, удовлетворяющий формуле $P = 0 \wedge f$, не может иметь меньший RD-ранг, чем порядок P , и обязательно совпадает с p : это открытое множество изолирует p.

$\square$

Эта лемма позволяет нам доказать, что каждое дифференциальное поле обладает дифференциальным замыканием. Действительно, пусть K – такое поле и L – дифференциально замкнутое расширение K. Если K дифференциально замкнуто, то оно является своим замыканием, иначе существует изолированный тип $p \in S_1(K)$, не реализующийся в K : действительно, некоторая система $P = 0 \wedge Q \neq 0$ не имеет решения в K, и по лемме 6.18 эта система удовлетворяется некоторым изолированным типом над K. Так как L дифференциально замкнуто, оно содержит элемент такого типа, скажем a_0 ; полагаем $K_1 = K(a_0)_d$. Если K_1 дифференциально замкнуто, то остановимся, иначе найдем a_1 из $L - K_1$, изолированного типа над K_1, и т.д.

Продолжая такой процесс, построим последовательность a_α элементов из L, индексированных ординалами, такую, что $a_\alpha \notin K_\alpha = K(\{a_\beta\}_{\beta<\alpha})_d$ и тип a_α над K_α изолирован.

Неизбежно через некоторое (трансфинитное) число шагов эта конструкция остановится, поскольку она разворачивается внутри L и a_α не повторяются. Значит, в конце концов мы получим дифференциально замкнутое поле $\bar{K} = K(\{a_\beta\}_{\beta<\gamma})_d$ для некоторого γ.

Я утверждаю, что $\bar{K}$ – простое дифференциально замкнутое поле над K: действительно, если L_1 – дифференциально замкнутое надполе K, тип a_0 над K, как изолированный, реализуется в L_1 ; это означает, что можно вложить K_1 в L_1 ; затем реализуем тип a_1 над K_1 в L_1 и т.д. ; итерируя процедуру, мы вкладываем K_α в L_1 , следующим шагом мы можем продолжить это вложение на a_α , поскольку его тип над K_α изолирован.

Установив существование дифференциального замыкания, зададимся вопросом об его единственности. Действительно, $\bar{K}$ – единственное простое дифференциально замкнутое поле над K, но мы в данный момент далеки от возможности его доказательства; она требует достаточно тонкую технику стабильности и будет приведено лишь в главе 18.

Дифференциальное замыкание имеет более патологические свойства, чем алгебраическое замыкание полей. Прежде всего, какой тип будет алгебраическим в смысле дифференциально замкнутых полей ? Если P – многочлен порядка ≥ 1 и Q – многочлен меньшего порядка, чем P , то мы видим, что система $P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0 \wedge x \neq a_1 \wedge \cdots \wedge x \neq a_n$ имеет решение в в любом дифференциально замкнутом поле, содержащем его коэффициенты. Как следствие, единственными алгебраическими типами будут те, у которых минимальный многочлен порядка 0. Таким образом, в случае дифференциально замкнутых полей, алгебраическое замыкание в теоретико-модельном смысле есть не что иное, как алгебраическое замыкание в качестве поля.

Если, например, K – поле констант, то мы видим, что его дифференциальное замыкание намного больше чем алгебраическое замыкание, поскольку легко убедиться, что любой алгебраический над K элемент является константой. Это влечет, что если L – дифференциально замкнутое расширение K, то для единственности образа вложения $\bar{K}$ нет никаких оснований. Действительно, пусть p – изолированный и неалгебраический тип из $S_1(K)$ (например, если K – поле констант, то формула $x' = 1$ изолирует тип над ним) ; так как p неалгебраичен, то теория, язык которой содержит $\varkappa$ новых символов констант, выражающая, что эти элементы – различные реализации p, совместна. Как следствие, K имеет дифференциально замкнутое расширение L с $\varkappa$ реализациями типа p, где $\varkappa > |K|$. Однако, каждая из них может быть взята как первый элемент в нумерации некоторой копии $\bar{K}$, так что каждая из них может содержатся в образе вложения $\bar{K}$; но, так как по теореме Левенгейма K имеет дифференциально замкнутое расширение в своей мощности, $card(K) = card(\bar{K})$, так что вложение $\bar{K}$ в L не может содержать их всех.

Поле $\bar{K}$ имеет, если K – поле констант, ещё более озадачивающее свойство: существуют дифференциально замкнутые поля, лежащие строго между K и $\bar{K}$. Естественно, так как они также простые, они K-изоморфны $\bar{K}$: существует не сюръективное K-вложение $\bar{K}$ в $\bar{K}$! (говорят, что простая модель, имеющая такое свойство, *не минимальна*) . Доказательство этого факта использует легкую теорию моделей и один очень непростой результат дифференциальной алгебры.

6.c Булевы алгебры

Булевым кольцом называется ассоциативное кольцо с единицей, в котором $x^2 = x$ для любого x; значит, мы имеем также $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$ и кроме этого $(x+y)^2 = x + y$; поэтому $xy + yx = 0$ для произвольных x, y ; $x^2 + x^2 = 0$, значит, $x + x = 0$ для любого x или $x = -x$; отсюда булево кольцо имеет характеристику 2 и, так как $xy = -yx = yx$, оно коммутативно.

Чтобы аксиоматизировать это понятие, мы вводим язык, содержащий два символа констант 0 и 1 , два символа бинарных отношений $+$ и $\cdot$; читатель без труда напишет несколько универсальных аксиом, выражающих, что A булево кольцо, не забывая при этом $0 \neq 1$. В булевом кольце определим две бинарные операции $\wedge$, $\vee$ и унарную операцию $\neg$ следующим образом : $x \wedge y = x \cdot y$, $x \vee y = x + y + xy, \quad \neg x = 1 + x$.

Читатель легко убедится, что следующие свойства выполняются для всех x, y и z .

- (законы де Моргана или дуальность) $\neg(\neg x) = x$,
  $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \quad \neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$,
- $x \vee x = x \wedge x = x$,
- (ассоциативность $\wedge$) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
- (ассоциативность $\vee$) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,
- (дистрибутивность $\wedge$ над $\vee$) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
- (дистрибутивность $\vee$ над $\wedge$) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
- (коммутативность $\wedge$ и $\vee$) $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$,
- $x \wedge \neg x = 0, \quad x \vee \neg x = 1$,
- $x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \vee 1 = 1$,
- $0 \neq 1, \quad \neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0$.

Структура в языке $0, 1, \neg, \wedge, \vee,$, удовлетворяющая этим универсальным аксиомам, называется *булевой алгеброй* ; читатель может проверить снова, что в булевой алгебре отношение $x \wedge y = x$ эквивалентно отношению $x \vee y = y$ и, что это – (частичный) порядок, который мы обозначим $x \leq y$; относительно него 0 является наименьшим, а 1 наибольшим элементами. Для этого порядка $x \vee y$ есть верхняя грань x и y , и $x \wedge y$ нижняя грань: таким образом, речь идет о решетке и даже о *дистрибутивной* решетке (удовлетворяющей аксиомам дистрибутивности $\wedge$ над $\vee$ и $\vee$ над $\wedge$) ; кроме этого она снабжена операцией дополнения $\neg$, которая переставляет $\wedge$ и $\vee$, инволютивна, т.е. $\neg(\neg x) = x$, и переворачивает порядок: если $x \leq y$, то $\neg x \geq \neg y$; вдобавок $\neg x$ – одновременно наименьший элемент y, такой, что $x \vee y = 1$ и наибольший элемент y, такой, что $x \wedge y = 0$. Как следствие, мы видим, что булева алгебра может быть также рассматриваться как частичный порядок, называемый булевым порядком: все операции $0, 1, \neg, \wedge, \vee$ определяются через этот порядок.

С булевым кольцом A мы связали некоторую булеву алгебру $b(A)$; обратное я оставляю читателю для проверки: если в булевой алгебре B мы полагаем $x \cdot y = x \wedge y, \quad x + y = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$, то получаем булево кольцо $a(B)$; и кроме этого $a(b(A)) = A, \quad b(a(B)) = B$. Таким образом, мы видим, что с точностью до языка булевы кольца и булевы алгебры одни и те же структуры, булево кольцо канонически преобразуется в булеву алгебру и наоборот, преобразования в обеих направлениях осуществляются с помощью бескванторных формул.

Несомненно, что все, о чем говорилось выше, опирается на простые, но немного длинные проверки (в особенности, проверка ассоциативности $+$) , и именно поэтому я оставляю это удовольствие читателю. Как пример булевой алгебры можно привести алгебру подмножеств непустого множества E, где $0 = \emptyset, \quad 1 = E, \neg x$ – дополнение x в $E, \quad x \vee y$ – объединение x и y , $x \wedge y$ – их пересечение; как булево кольцо, это есть не что иное, как произведение копий двухэлементного поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (являющегося, впрочем, наименьшим булевым кольцом со сложением: $0 + 0 = 1 + 1 = 0, \ 0 + 1 = 1$; и умножением $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$), где копии индексированы элементами E ; чтобы это понять, сопоставим каждому подмножеству x в E его характеристическую функцию, т.е. функцию из E в множество $\{0, 1\}$, которая отображает e в 1 , если $e \in x$, и в 0 , если $e \notin x$. Из-за этого эта булева алгебра обозначается 2^E .

Подмножество I булевого кольца A называется *идеалом* в A , если оно идеал (нетривиальный, т.е. не содержащий 1) в обычном для колец смысле :

– если x и y из I , то $x + y$ лежит в I ,

– если x лежит в I , то $x \cdot y$ лежит в I ,

– $1 \notin I$.

Если мы перейдем к языку булевых алгебр, эти условия после некоторых манипуляций, выполнение которых мы снова оставляем читателю, перепишутся так :

– если x и y из I , то $x \vee y$ лежит в I ,

– если $x \in I$ и $y \leq x$, то $y \in I$,

– $1 \notin I$.

Каждый знает, что образ кольца A при гомоморфизме f изоморфен фактору A по ядру f , которое является идеалом и, что обратно по любому идеалу можно определить фактор-кольцо A/I . Это имеет место, в частности, для булевых колец и для булевых алгебр, алгебра B/I будет алгеброй, ассоциированной фактору соответствующего булевого кольца по I .

Для фактора A/I , элементами I будут в точности, те элементы, которые отображаются в 0 . В булевом контексте, чаще предпочитают рассмотрение элементов, отображающихся в 1, и называют *фильтром* множество элементов вида $\neg x$, где x пробегает некоторый идеал (обратите внимание: фильтр не дополнение к идеалу, а множество элементов, дополнение которых принадлежит идеалу!) ; таким образом фильтр характеризуется следующими свойствами :

– если x и y из F , то $x \wedge y$ лежит в F ,

– если $x \in F$ и $x \leq y$, то $y \in F$,

– $0 \notin F$.

Часто, когда говорят о факторе булевой алгебры, фильтр и идеал, соответствующий ему, отождествляют. Можно заметить следующее: если B булева алгебра, то полагая

$$0' = 1, \quad 1' = 0, \quad \neg x' = \neg x, \quad x \wedge' y = x \vee y, \quad x \vee' y = x \wedge y \ ,$$

мы определяем на множестве B другую структуру B' булевой алгебры, называемой *дуальной* к B ; отображение $x \mapsto \neg x$ является изоморфизмом B на B' , фильтры B' будут идеалами B, так что некоторые говорят "дуальный идеал" вместо фильтра.

Фильтры над I , рассмотренные нами в разделе 4.a являются фильтрами булевой алгебры 2^I . В булевой алгебре идеал прост если и только, если он максимален, поскольку единственное целостное булево кольцо – это двухэлементное поле $\{0,1\}$; идеал I в B максимален тогда и только тогда, когда $B/I = \{0,1\}$, т.е. если для любого x либо x, либо $\neg x$ лежит в I . Фильтр, соответствующий максимальному идеалу называется *ультрафильтром*: ультрафильтры – это максимальные фильтры F, равным образом характеризующиеся среди всех фильтров тем свойством, что для любого x либо x , либо $\neg x \in F$, следовательно, множество, состоящее из дополнений элементов ультрафильтра, – это соответствующий ему максимальный идеал.

Если E – вполне несвязное компактное пространство (т.е. обладающее базой открытых множеств, одновременно являющихся замкнутыми), то открыто-замкнутые подмножества E образуют булеву подалгебру 2^E. Это, на самом деле, самый общий вид булевой алгебры, как показывает следующая теорема о представлении.

Теорема 6.19 (Стоун) *Каждая булева алгебра изоморфна алгебре открыто-замкнутых множеств вполне несвязного компактного пространства E , которое кроме того, определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Пусть E – множество максимальных идеалов B , и для каждого x из B полагаем $\langle x\rangle = \{I : I \in E \text{ и } x \in I\}$; заметим, что $\langle 0\rangle = E, \quad \langle 1\rangle = \emptyset, \quad \langle\neg x\rangle = E - \langle x\rangle$ и $\langle x \wedge y\rangle = \langle x\rangle \cup \langle y\rangle$, поскольку $x \wedge y = x \cdot y$ и идеалы – простые. Тогда $\langle x \vee y\rangle = \langle x\rangle \cap \langle y\rangle$, действительно идеал, содержащий x и y, содержит и $x \vee y$; если он содержит $x \vee y$, то он содержит x и y , которые меньше него.

Значит, множества вида $\langle x\rangle$ образуют подалгебру 2^E и порождают топологию $\mathcal{J}$ на E ; покажем, что E становится таким образом компактным пространством (которое вполне несвязно, поскольку каждое открытое множество из базы является одновременно замкнутым) ; E сепарабельно, поскольку если $I \neq J$, то существует $x, \quad x \in I$, но $x \notin J$; тогда $\neg x \in J$ и, значит, $\langle x\rangle$ и $\langle\neg x\rangle$ – две окрестности отделяющие I и J. Если $\langle x_i\rangle$ – семейство замкнутых множеств из базы, обладающее свойством конечного пересечения, то любое конечное число x_i содержится в некотором идеале, а также 1 не принадлежит идеалу, порожденному всеми x_i , т.е. он собственный идеал (отличный от B), который содержится в некотором максимальном идеале (смотрите раздел 8.b об аксиоме выбора) . Этот идеал принадлежит пересечению всех $\langle x_i\rangle$.

Заметим, что множества вида $\langle x\rangle$ являются единственными открыто-замкнутыми подмножествами E . Действительно, открытое множество является объединением множеств вида $\langle x_i\rangle$ и если оно компакт, то является объединением конечного числа из них. Итак, мы определили сюръективный гомоморфизм B на дуальную к алгебре открыто-замкнутых подмножеств E . Что будет ядром ? Если x лежит в ядре, то $\langle x\rangle = E$ (так как нулем дуальной алгебры будет E , а не $\emptyset$) ; это означает, что $x = 0$, поскольку если $x \neq 0$, то существует максимальный идеал, содержащий $\neg x$ и не содержащий x .

Значит этот гомоморфизм биективен; вообще-то предпочитают рассматривать пространство E' ультрафильтров B , снабженное топологией, определяемой с помощью $\langle x\rangle = \{F : F \in E' \text{ и } x \in F\} = \{F : F \in E' \text{ и } \neg x \notin F\}$; так как B и B' изоморфны, то такими будут E и E' , но этот путь – более удобный, поскольку сразу получают изоморфизм на алгебру открыто-замкнутых подмножеств E' :

$$\langle 0\rangle = \emptyset,\ \langle 1\rangle = E',\ \langle x \wedge y\rangle = \langle x\rangle \cap \langle y\rangle\ \langle x \vee y\rangle = \langle x\rangle \cup \langle y\rangle\ ,$$

а не изоморфизм на её дуальную алгебру. Это пространство ультрафильтров B называется *пространством Стоуна* B .

Таким образом, B представляется как алгебра открыто-замкнутых множеств своего пространства Стоуна. Докажем единственность: если E – вполне несвязный компакт, то ультрафильтры алгебры B открыто-замкнутых подмножеств E по сходимости соответствуют точкам E, изоморфного пространству Стоуна B .

□

Заметим, что непустые замкнутые множества пространства Стоуна алгебры B соответствуют её фильтрам: $F \in \cap\langle x_i\rangle$ если и только, если F содержит фильтр порожденный всеми x_i . Так как конечная булева алгебра имеет конечное пространство Стоуна, это пространство дискретно и алгебра изоморфна булевой алгебре всех подмножеств множества $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

С булевыми алгебрами мы сталкиваемся повсюду в теории моделей, чаще всего как с алгеброй предложений некоторого языка $\mathcal{L}$, рассматриваемых по модулю эквивалентности (два предложения эквивалентны, если они имеют одни и те же модели) . Теория это фильтр в этой алгебре; её стоуновское пространство, таким образом, образовано из полных в этом языке теорий. Эта алгебра носит название *алгебры Тарского-Линденбаума* языка $\mathcal{L}$. Если мы её факторизуем по теории T , получаем алгебру Тарского-Линденбаума теории T , которая является алгеброй предложений из $\mathcal{L}$ с точностью до эквивалентности по модулю T (два предложения эквивалентны по модулю T , если они имеют одни и те же модели среди моделей для T) ; если T полна, эта алгебра сводится к двум элементам, нулю, который является классом предложений ложных для T $(\neg f \in T)$, и к единице, т.е. класса предложений истинных для T $(f \in T)$.

С помощью тех же соображений, можно рассматривать алгебру предложений языка $\mathcal{L} \cup \{x\}$ или $\mathcal{L} \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$; пространством Стоуна этой алгебры будет пространство типов, являющихся полными теориями в этих языках.

Можно приступать к изучению теории моделей алгебраическим способом, рассматривая булевы алгебры, снабженные операциями, соответствующие кванторам; их называют *полиадическими алгебрами* : они абстрактные эквиваленты алгебры формул некоторого языка. Тогда теорема компактности доказывается с помощью теоремы о представлении полиадических алгебр, аналога теоремы 6.19 . Эта область логики, в которую мы не будем проникать глубоко, называется *алгебраической логикой.*

Теперь мы собираемся изучать некоторые булевы алгебры как структуры, т.е. сделать их объектами теории моделей. В булевой алгебре B фильтр F , порожденный конечным числом элементов $x_1, \ldots, x_n$ порождается также их нижней гранью: значит, он главный. Если F – главный ультрафильтр, то его образующий является ненулевым минимальным элементом, такие элементы назовём *атомами.* Говорят, что алгебра *атомна*, если каждый ненулевой элемент мажорирует некоторый атом. Например, 2^E и, в частности, любая конечная булева алгебра атомна. Атомность булевой алгебры означает также, что изолированные точки её пространства Стоуна, которые в точности совпадают с главными ультрафильтрами, образуют плотное подмножество.

В атомной булевой алгебре B два элемента равны как только они мажорируют одни и те же атомы (поскольку тогда $(\neg x \wedge y) \vee (\neg y \wedge x)$ – нуль), так что B оказывается подалгеброй алгебры всех подмножеств множества всех атомов. В противоположность атомным алгебрам, мы имеем *безатомные* алгебры, стоуновское пространство которых не содержит изолированных точек.

Атомность или безатомность алгебры легко выражается с помощью аксиом. Так как каждая булева алгебра вкладывается в 2^E , где E – её стоуновское пространство, теория атомных алгебр является компаньоном теории булевых алгебр. Это имеет место также для теории безатомных булевых алгебр : вложим B в алгебру $B_1 = B \times B$ диагонально, сопоставляя элементу x элемент (x, x) ; никакой элемент B не является атомом в B_1 , так как если $(x, x) \neq (0, 0)$, то он находится строго выше $(x, 0)$; повторяя эту процедуру построим цепочку $B \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$, такую, что никакой элемент B_n не является атомом в B_{n+1} : предел алгебр B_n будет безатомной алгеброй.

Атомная булева алгебра, имеющая лишь конечное число атомов $a_1, \dots, a_n$ конечна: если мы сопоставим элементу x этой алгебры множество атомов, которые он мажорирует, то получим изоморфизм B на 2^n . Заметим также, что булева алгебра, порожденная конечным множеством элементов $x_1, \dots, x_n$, конечна. Её атомами будут элементы вида $\varepsilon_1 x_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n x_n$, не равные нулю, где $\varepsilon_i =$ "ничего" или $\neg$. На самом деле легко видеть, что каждый ненулевой элемент булевой алгебры, порожденной $x_1, \dots, x_n$, является верхней гранью элементов такого вида (используйте ассоциативность, дистрибутивность и законы де Моргана, чтобы доказать, что элементы описанного вида действительно образуют булеву алгебру) . В частности, свободная алгебра, порожденная n элементами, имеет 2^n атомов, значит она имеет 2^{2^n} элементов.

Для каждого натурального n мы рассмотрим формулу $A_n(x)$, выражающую, что x мажорирует по крайней мере n атомов.

Теорема 6.20 *Теория бесконечных атомных булевых алгебр полна; она элиминирует кванторы в языке* $\{0, 1, \neg, \wedge, \vee, A_1, \dots, A_n, \dots\}$ . .

Доказательство. Рассмотрим в двух бесконечных атомных, ω-насыщенных булевых алгебрах кортежи $\bar{a}$ в первой и $\bar{b}$ во второй, удовлетворяющих одним и тем же бескванторным формулам вышеописанного языка. Последнее означает, что если $\varepsilon_1 a_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n a_n$ мажорирует в точности m атомов (т.е. удовлетворяет формуле $A_m(x) \wedge \neg A_{m+1}(x)$) , то этому же условию удовлетворяет $\varepsilon_1 b_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n b_n$. Так как алгебра атомна, то в частности для $m = 0$, это означает, что если один из этих элементов – нуль, то другой также равен нулю. Это условие достаточно для того, чтобы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ породили изоморфные подалгебры; если $\varepsilon_1 a_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n a_n$ мажорирует бесконечное число атомов, т.е. удовлетворяет $A_m(x)$ для всех $m \in \omega$, то таким же будет и $\varepsilon_1 b_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n b_n$.

Добавим α к кортежу $\bar{a}$; для любой цепочки $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ полагаем $\varepsilon\bar{a} = \varepsilon_1 a_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n a_n$, $\alpha_\varepsilon = \alpha \wedge \varepsilon\bar{a}$, $\alpha'_\varepsilon = \neg\alpha \wedge \varepsilon\bar{a}$; мы различаем следующие случаи :

- если $\varepsilon\bar{a}$ мажорирует в точности m атомов, то α_ε мажорирует p , а α'_ε мажорирует q атомов и $p + q = m$; по предположению $\varepsilon\bar{b}$ мажорирует также m атомов и через β_ε обозначим верхнюю грань p из них, а через β'_ε остальных; $\beta_\varepsilon \wedge \beta'_\varepsilon = 0$, $\beta_\varepsilon \vee \beta'_\varepsilon = \varepsilon\bar{b}$;

- если $\varepsilon\bar{a}$ мажорирует бесконечное число атомов, в то время когда α_ε мажорирует только p из них, возьмем в качестве β_ε верхнюю грань p атомов, находящихся под $\varepsilon\bar{b}$, в качестве β'_ε – её относительное дополнение; аналогично поступаем, если α'_ε мажорирует конечное число атомов;

- если $\varepsilon\bar{a}$, α_ε и α'_ε мажорируют бесконечное число атомов, то нужно разделить $\varepsilon\bar{b}$ на два дизъюнктных куска β_ε и β'_ε , каждый из которых мажорирует бесконечное число атомов.

Это возможно, поскольку в ω-насыщенной булевой алгебре, если a мажорирует бесконечное число атомов, то существует такой b , что $a \wedge b$ и $a \wedge \neg b$ мажорируют бесконечное число атомов. Действительно, если b_n – верхняя грань n атомов под a , то $a \wedge b_n$ мажорирует n атомов, а $a \wedge \neg b$ – бесконечное число, откуда по компактности и ω-насыщенности следует результат.

Теперь, чтобы найти элемент β, такой, что $\bar{a}^\frown\alpha$ и $\bar{b}^\frown\beta$ ∞-эквивалентны, достаточно склеить кусочки и взять в качестве β верхнюю грань всех β_ε (дополнение которого есть верхняя грань всех β'_ε) .

□

Теорема 6.21 *Теория безатомных булевых алгебр полна и имеет элиминацию кванторов (в языке* $0, 1, \neg, \wedge, \vee$ *) ; она является модельным пополнением теории булевых алгебр.*

Доказательство. Докажем, что два кортежа $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в произвольных двух безатомных булевых алгебрах, удовлетворяющих одним и тем же бескванторным формулам, ∞-эквивалентны. Булева алгебра порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$ определяется с точностью до изоморфизма условиями вида $\varepsilon\bar{a} = 0$, $\eta\bar{a} \neq 0$. С другой стороны, так как алгебра безатомна, то любой элемент делится на две ненулевые части.

Добавим α к $\bar{a}$, если $\alpha_\varepsilon = 0$, то полагаем $\beta_\varepsilon = 0$. Если $\alpha'_\varepsilon = 0$, то полагаем $\beta_\varepsilon = \varepsilon\bar{b}$, и если α_ε и α'_ε – ненулевые, то разделим $\varepsilon\bar{b}$ на два ненулевых куска: $\varepsilon\bar{b} = \beta_\varepsilon \vee \beta'_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon \wedge \beta'_\varepsilon = 0$. Остается склеить все β_ε .

□

Так как две безатомные булевы алгебры всегда ∞-эквивалентны, то мы видим, что с точностью до изоморфизма существует только одна счетная безатомная булева алгебра (теорема 1.14) , которая, впрочем, является свободной алгеброй порожденной счетным числом образующих; через дуальность Стоуна (теорема 6.19) это доказывает, что существует только одно вполне несвязное компактное пространство без изолированных точек со счетной базой (это дисконтинуум Кантора) .

Теорема 6.22 *Теория безатомных булевых колец полна и допускает элиминацию кванторов (в языке* $0, 1, \neg, \wedge, \vee$ *) ; она является модельным пополнением теории булевых колец.*

Доказательство. Операции булевых колец определяются через операции булевой алгебры и наоборот с помощью бескванторных формул.

□

Я напомню, что *булев порядок* это порядок соответствующий некоторой булевой алгебре. Поскольку операции в ней определимы через порядок, то булевы порядки являются моделями следующей теории : выражаем, что существуют наименьший и наибольший элементы, верхние и нижние грани, дополнение и эти понятия удовлетворяют аксиомам булевой алгебры. Булевы порядки без атомов являются моделями некоторой полной теории, поскольку мы выражаем порядок через булевы операции, она не является модельно полной, так как вложение порядка не сохраняет понятия наименьшего элемента, верхней грани и т.п. Расширение безатомных булевых порядков элементарно, только если соответствующие булевы операции сохраняются.

Теория булевых порядков является компаньоном теории (частичных) порядков. Действительно, порядок I вкладывается в порядок булевой алгебры 2^I при сопоставлении множества $I_a = \{x : x \leq a\}$ с a , так как $I_a \subseteq I_b \iff a \leq b$. В частности, мы видим, что любой счетный частичный порядок вкладывается в счетную безатомную булеву алгебру.

Наконец заметим, что теория частичного порядка обладает модельным пополнением; рассмотрим частичный порядок, определенный на $n+1$ элементах $x_1, \ldots, x_n, y$. Обозначим через $f(\bar{x}, y)$ диаграмму этого порядка, т.е. конъюнкцию формул вида $u \leq v$, $\neg(u \leq v)$, выполняющихся на нем. Через $g(\bar{x})$ обозначим диаграмму ограничения этого порядка на $x_1, \ldots, x_n$. Добавим к теории частичных порядков в качестве аксиом все предложения следующего вида для каждой возможной пары (f, g) :

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\exists y)(g(\bar{x}) \to f(\bar{x}, y)) .$$

Это совместная теория и, на самом деле, это компаньон теории частичных порядков. Действительно, если I – частичный порядок, A – конечное подмножество I и b – новый элемент, такой, что порядок на $A \cup \{b\}$ продолжает порядок на A , то определяем следующим образом порядок на $I \cup \{b\}$, продолжающий одновременно порядок на I и на $A \cup \{b\}$: если $c \in I$, то полагаем $c \leq b$, если существует a в A такой, что $c \leq a$ и $a \leq b$, и полагаем $b \leq c$, если существует a в A такой, что $b \leq a$ и $a \leq c$. Мы без труда убеждаемся, что это частичный порядок.

Из этого мы выводим, сделав ω шагов в схеме построения, которая теперь должна быть хорошо знакома читателю, что любой частичный порядок вложим в некоторую модель этой теории T . Почти очевидно, что два кортежа из двух моделей T , удовлетворяющие одним и тем же свободным формулам, ∞-эквивалентны. Так как две модели T всегда ∞-эквивалентны, существует только одна счетная модель с точностью до изоморфизма.

6.d Ультраметрические пространства

Рассмотрим линейный порядок I с наименьшим элементом 0, и назовем *ультраметрическим пространством* множество E вместе с отображением $d : E^2 \to I$, удовлетворяющем следующим условиям:

– для всех x и y из E $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

– для всех x и y из E $\quad d(x, y) = d(y, x)$

– для всех x и y из E $\quad d(x, z) \leq Max(d(x, y), d(y, z))$.

Значение $d(x, y)$ называется *расстоянием* от x до y . Третье условие носит название *ультраметрического неравенства*; оно означает, что отношения $d(x, y) \leq i$ и $d(x, y) < i$ являются отношениями эквивалентности, и оно влечёт, что данные три точки образуют либо равносторонний треугольник $(d(x, y) =$

$d(y,z) = d(z,x))$, либо "равнобедренный" треугольник, имеющий две равновеликие стороны, где третья сторона – самая меньшая. Мы договоримся здесь называть *правильным многогранником* множество точек, равноудаленных друг от друга.

Чтобы говорить об этом понятии ультраметрического пространства мы введём унарный предикат $I(u)$ для обозначения носителя порядка I , константный символ для 0 , символ бинарного отношения $\leq$ для порядка I , унарный символ $E(u)$ для обозначения самого пространства E и символ функции для обозначения расстояния. Носитель структуры, соответствующий ультраметрическому пространству, образуется с одной стороны из I, а с другой – из пространства E, так что выполняются два следующих условия:

$$(\forall u)(I(u) \vee E(u), \quad \neg(\exists u)(I(u) \wedge E(u)) \ .$$

Чтобы не писать I и E повсюду, мы различаем два вида переменных:

– переменные вида $i, j, k, \ldots$ должны рассматриваться как представляющие *расстояния*, т.е. элементы I , $(\exists i)f(i)$ и $(\forall i)f(i)$ должны рассматриваться как сокращения для $(\exists u)(I(u) \wedge f(u)), \quad (\forall u)(I(u) \to f(u))$.

– переменные вида $x, y, z, \ldots$ должны рассматриваться как представляющие *точки*, т.е. элементы E, и формулы $(\exists x)f(x), \quad (\forall x)f(x)$ – сокращения для $(\exists u)(E(u) \wedge f(u)), \quad (\forall u)(E(u) \to f(u))$.

Понятие ультраметрического пространства легко (универсально) аксиоматизируется в этом языке. Мы рассмотрим следующий список аксиом:

$$A_0 \quad (\exists x)(x = x) \ ,$$

$$A_1 \quad (\forall i)(\forall x)(\exists y)(d(x,y) = i) \ ,$$

$$A_2 \quad (\forall i)(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists y)(d(x_1,x_2) = i \to d(x_1,y) = d(x_2,y) = i) \ ,$$

....

$$A_n \quad (\forall i)(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\exists y)(\bigwedge_{1\leq\alpha<\beta\leq n} d(x_\alpha,x_\beta) = i \to \bigwedge_{1\leq\alpha\leq n} d(x_\alpha,y) = i) \ ,$$

....

$$B_2 \quad \neg(\exists i)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(d(x_1,x_2) = d(x_2,x_3) = d(x_3,x_1) = i \neq 0) \ ,$$

....

$$B_n \quad \neg(\exists i)(\exists x_1)\ldots(\exists x_{n+1})(i \neq 0 \wedge \bigwedge_{1\leq\alpha<\beta\leq n+1} d(x_\alpha,x_\beta) = i)$$

....

Для $n \geq 2$ аксиома A_n выражает, что каждый правильный многогранник с n вершинами продолжается до правильного многогранника с $(n+1)$ вершинами; напротив, аксиома B_n выражает, что не существует правильного многогранника с $n+1$ вершинами. Ультраметрическое пространство называется *богатым*, если оно удовлетворяет всем аксиомам $A_0, \ldots, A_n, \ldots$; для $n \geq 2$ ультраметрическое пространство называется *n-богатым*, если оно удовлетворяет аксиомам $A_0, \ldots, A_{n-1}, B_n$.

Лемма 6.23 *Каждое I-значное пространство вкладывается в I-значное богатое пространство; каждое I-значное пространство без правильных многогранников с $n+1$ вершинами вкладывается в I-значное n-богатое пространство.*

Доказательство. Пусть E – I-значное пространство; если E – пустое, то добавим одну точку a к E . Ясно, что множество $\{a\}$ с функцией $d(a,a) = 0$ является ультраметрическим пространством и аксиома A_0 удовлетворяется.

Предположим теперь, что существует a в E и нет элементов из E находящихся на расстоянии i от a . Тогда добавим точку b к E и продолжим расстояние на E до $E \cup \{b\}$:

- $d(a,b) = i$,
- если $c \in E$, $c \neq a$, тогда обязательно $d(a,c) \neq i$; если $d(a,c) < i$, то полагаем $d(b,c) = i$ и если $d(a,c) > i$, то полагаем $d(b,c) = d(a,c)$.

Легко проверить, что действительно получим ультраметрическое расстояние и заметим, что если $E \cup \{b\}$ содержит правильный многогранник из n точек, то такой многогранник содержит и E (если этот многогранник содержит b , то он не содержит a : заменим b на a).

Предположим теперь, что мы имеем n точек $a_1, \ldots, a_n$ в E, равноудаленных друг от друга на расстоянии i , но этот правильный многогранник не расширяется; тогда мы добавляем к E точку b вместе со следующими расстояниями:

$$d(a_1,b) = \cdots = d(a_n,b) = i\ ;$$

если c в E отлично от $a_1, \ldots, a_n$, тогда для некоторого a_m верно неравенство $d(a_m,c) \neq i$. Если $d(c,a_m) > i$, то все $d(c,a_h)$ равны между собой и полагаем $d(c,b) = d(c,a_n)$. Если напротив $d(c,a_m) < i$, то в этом случае $d(c,a_h) = i$ для всех $h \neq m$, и мы полагаем $d(c,b) = i$.

Проверку того, что мы получили ультраметрическое пространство оставляем читателю. Заметим, что i – минимально возможное расстояние от b до точки из E. Докажем, что если E не содержит правильного многогранника с $n+2$ вершинами, то такого многогранника нет и в $E \cup \{b\}$. Пусть $c_1, \ldots, c_{n+1}, b$ образуют такой многогранник, длина ребер которого равна j . Если $j > i$, то все $d(c_m,a_h)$ равны j , что нам дает правильный многогранник с $n+2$ вершинами в E . Если $j = i$, то из-за максимальности многогранника $a_1, \ldots, a_n$ каждому c_h соответствует некоторый a_k и только один такой, что $d(c_h,a_k) < i$; так как число элементов c_h на единицу больше, чем в этом многограннике, имеем, например, $d(c_1,a_1) < i$, $d(c_2,a_1) < i$, что противоречит вместе с $d(c_1,c_2) = i$ ультраметрическому неравенству.

После этого, стартуя от данного I-значного пространства E и добавляя к нему по одному точки, получим I-значное расширение такое, что каждая точка a из E имеет находящуюся от неё на расстоянии i точку b в E_1 и каждый правильный многогранник с n вершинами в E расширяется до такого многогранника с $n+1$ вершинами в E_1 . Итерируя этот процесс, получим цепь I-значных пространств $E \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \ldots$, предел которой будет богатым.

Если теперь E не имеет правильных многогранников с $(n+1)$ вершинами, мы можем проделать то же самое, расширяя только правильные многогранники, имеющие меньше n вершин, и, согласно нашему замечанию, не введя правильных многогранников с $n+1$ вершинами. Таким образом, мы погружаем E в n-богатое пространство.

□

Теория богатого пространства, в частности, содержит теорию своего порядка. Мы поймем, что на самом деле она сводится к ней : если порядки I и J элементарно эквивалентны, то богатое I-значное пространство элементарно эквивалентно любому богатому J-значному пространству. Каждому кортежу $(\bar{i}, \bar{x})$ образованному из n-ки элементов I и m-ки элементов из E , мы сопоставляем $(n+m(m-1)/2)$-ку, образованную из i и попарных расстояний элементов $\bar{x}$; этот кортеж будет называться *кортежем расстояний* для $(\bar{i}, \bar{x})$.

Теорема 6.24 *Два богатых ультраметрических пространства элементарно эквивалентны, как только таковыми будут их порядки. Расширение богатых пространств элементарно, как только расширение соответствующих порядков элементарно; более точно, два кортежа из таких пространств имеют одинаковый тип если и только, если их кортежи расстояний имеют одинаковый тип в смысле теории линейных порядков. Тот же результат верен и для n-богатых пространств.*

Доказательство. Предположим, что нам даны два богатых ультраметрических пространства (I, E) и (J, F) , которые, как обычно, ω-насыщенны. Покажем, что это влечет ω-насыщенность порядков I и J (это частный случай общего результата о структурах, одна из которых интерпретируется в другой, смотри раздел 9.d) . Действительно, если $\bar{a}$ – конечное подмножество I и p – тип над $\bar{a}$ в смысле теории порядка I , то он реализуется элементом α в некоторой ультрастепени I^U порядка I; α – элемент также ультраметрического пространства $(I, E)^U$: пусть q – его тип над $\bar{a}$ в смысле теории этого пространства. Поскольку (I, E) ω-насыщенна, q реализуется элементом β из I , который, если ограничится языком порядка I, реализует p .

Далее предположим, что I и J вдобавок элементарно эквивалентны и рассмотрим $\bar{a}$ в (I, E) , $\bar{b}$ в (J, F) такие, что их соответствующие кортежи расстояний $\bar{a}'$ и $\bar{b}'$ имеют одинаковый тип в языке порядков. Нам нужно доказать, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ∞-эквивалентны. Добавим, например, α слева, если $\alpha \in I$, то достаточно ответить таким β в J , что его тип над $\bar{b}'$ соответствует типу α над $\bar{a}'$, что возможно в силу ω-насыщенности J . Теперь предположим, что α лежит в E . Если $\bar{a}$ не содержит элементов из E , то отвечаем произвольным β из F ; иначе пусть a из $\bar{a}$, такой, что $d(\alpha, a)$ минимально, и b – точка, соответствующая a в

$\bar{b}$. Если $d(\alpha, a)$ не принадлежит $\bar{a}'$, то пусть j из J , тип которого (в смысле теории порядков) над $\bar{b}'$ соответствует типу $d(\alpha, a)$ над $\bar{a}'$. Так как F богато, то существует точка β в F, такая, что $d(\beta, b) = j$. Ультраметрическое неравенство определит все расстояния от β до $\bar{b}$ и кортежи $\bar{a}^\alpha$ и $\bar{b}^\beta$ имеют кортежи расстояний одного типа.

Теперь предположим, что $d(\alpha, a)$ лежит в $\bar{a}'$, тогда пусть P – максимальный правильный многогранник в $\bar{a}$ с длиной ребра $d(\alpha, a)$, содержащий точку a (возможно, что P сведется к $\{a\}$) ; так как $d(\alpha, a)$ минимально, то все расстояния от α до P равны $d(\alpha, a)$, а расстояния от α до оставшихся точек $\bar{a}$ определяются ультраметрическим неравенством. Если Q – правильный многогранник в $\bar{b}$, соответствующий P , достаточно ответить элементом β таким, что $Q \cup \{\beta\}$ – правильный многогранник, длина ребра $d(\beta, b)$ которого соответствует $d(\alpha, a)$ (последнее нужно только в случае, когда P состоит из одной вершины) .

То же доказательство работает для n-богатых пространств: просто там не сталкиваемся никогда с правильными многогранниками из более, чем n точек.

□

Просмотрев доказательство теоремы 6.24 мы видим, что два кортежа $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в двух богатых I-значных пространствах, имеющие одинаковые кортежи расстояний, ∞-эквивалентны. Значит два богатых I-значных пространства ∞-эквивалентны над I (т.е. элементы I остаются неподвижными в процессе "челнока"). Как следствие отсюда получим, что если I счетен, то по теореме 1.14 с точностью до изоморфизма (даже с точностью до I-изоморфизма!) существует единственное счетное богатое n-значное пространство. В этом случае по теореме Левенгейма каждое богатое I-значное пространство имеет элементарное счетное I-значное ограничение и ясно, что это счетное богатое I-значное пространство является единственной простой моделью *над множеством* I теории богатых пространств. Мы увидим в разделе 10.f , что для любого порядка I, даже несчетного, существует простое I-значное богатое ультраметрическое пространство, но это простое пространство не всегда единственно. Те же результаты верны для n-богатых пространств.

В предвидении глав о стабильности, мы хотим описать типы точек (т.е. элементов пространства, но не порядка) над моделью (I, E) теории богатых пространств, соответствующих теории данного порядка. По теореме 6.24 тип x над (I, E) определяется типами кортежей над I, образованных из $d(x, a)$, где a пробегает E. Это позволяет классифицировать типы на четыре вида :

– *реализованные типы* : тип элемента a из E , т.е. существует a из E такой, что $d(x, a) = 0$.

– *дистанционные типы* : существует элемент a из E, такой, что $d(a, x)$ не лежит в I (но лежит в некотором элементарном расширении I !). Тогда тип x полностью определяется заданием a и типом $d(a, x)$ над I . На самом деле, если b из E и $d(a, b) < d(a, x)$, то $d(b, x) = d(a, x)$, и если $d(a, b) > d(a, x)$, то $d(b, x) = d(a, b)$.

– *полигональные типы* : все $d(a, x)$ лежат в I и имеется минимум i . Пусть тогда a – такой, что $d(a, x) = i$ и P – максимальный правильный многогранник, содержащий a и имеющий длину ребер i (легко видеть, что если Q – другой такой многогранник, то существует каноническая биекция между P и Q , сопоставляющая элементу b из P единственный элемент b' из Q такой, что $d(b,b') < i$) . Тип x полностью определяется a и i : если b из P , то $d(b,x) \leq i$ и на самом деле $d(b,x) = i$ из-за минимальности i . Если $b \notin P$, то существует c из P такой, что $d(b,c) \neq i$ и ультраметрическое неравенство определяет $d(b,x)$.

– *псевдо-предельные типы* : в этом оставшемся случае все $d(a,x)$ лежат в I , но множество A элементов i из I, таких, что $d(x,a_i) = i$ для некоторого i , не имеет наименьшего элемента. Тогда, на самом деле A – концевой сегмент I : если $i \in A$, $i < j$, то берем a_j такой, что $d(a_i,a_j) = j$ и тогда $d(x,a_j) = j$.

Последовательность a_i – это то, что называется псевдопоследовательностью Коши: если $i < j$, то имеем $d(a_i,a_j) = j$. Псевдопределом такой последовательности будет элемент α (необязательно единственный, если 0 не будет нижней гранью A !), такой, что $d(\alpha,a_i) = i$ для всех i из A . Мы видим, что псевдопредельный тип определяется множеством A и последовательностью a_i элементов из E , которая сходится к x . Эта последовательность не должна иметь псевдопредел a в E , поскольку иначе $d(x,a)$ будет меньше всех i из A .

Говорят, что пространство *максимально полно* , если каждая псевдопоследовательность Коши в нем имеет псевдопредел. Легко видеть, что реализуя один за другим все псевдопредельные типы, каждое I-значное пространство можно расширить до максимально полного I-значного пространства. Над таким пространством псевдопредельных типов не существует.

Заметим, что только дистанционные типы заставляют расширяться порядок I . Все остальные можно реализовать в элементарном расширении (I,F) над (I,E) . Наконец, что касается n-богатых пространств, ситуация приблизительно похожа, за исключением того, что не существует полигональных типов.

6.e Модули, экзистенциально замкнутые модули

С левым A-модулем M над кольцом с единицей A мы связываем следующий язык :

– символ бинарной функции для обозначения сложения в M ,

– символ константы для обозначения нуля в M ,

– для каждогоα из A символ унарной функции для обозначения умножения на α .

Таким образом, мы видим что кольцо не является изучаемой структурой : оно является частью языка. Читатель легко выпишет какие универсальные аксиомы удовлетворяются A-модулями. Если A является кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел, то $\mathbb{Z}$-модуль не что иное как абелева группа. В этом случае можно ограничиться одним символом для сложения и одним символом для противоположного, поскольку $nx = x + \cdots + x$.

Для любой полной теории T A-модулей, мы хотим описать типы над моделями T . В связи с этим нам понадобится следующее предварительное, но впрочем полезное, утверждение.

Лемма 6.25 (Б. Нейман) *Пусть G – группа, не обязательно абелева, и $K_1, \ldots, K_n$ – конечное число правых или левых смежных классов по подгруппам G, такое, что $G = K_1 \cup \cdots \cup K_n$, тогда G покрывается теми K_i , которые соответствуют подгруппам конечного индекса в G .*

Доказательство. Так как $Ha = aa^{-1}Ha$, то все K_i имеют вид $a_i H_i$ для некоторых подгрупп H_i в G . Докажем лемму индукцией по числу m таких подгрупп.

Для $m = 1$ это очевидно: единственная вовлеченная подгруппа имеет конечный индекс.

Покажем переход от m к $m+1$. Рассмотрим конечное минимальное семейство смежных классов, покрывающих G, и пусть число вовлеченных подгрупп равно $m+1$. Если H – одна из них, то каждый класс aH, если он не участвует в покрытии, покрывается классами вида bH' с $H' \neq H$. Помножив все эти классы слева на a^{-1} и применив предположение индукции, мы видим, что для этого покрытия достаточны те bH' , у которых $H \cap H'$ имеет конечный индекс в H . Из этого мы выводим, что поскольку покрытие минимально, для любых вовлеченных подгрупп H и H' пересечение $H \cap H'$ имеет конечный индекс в обеих подгруппах.

Как следствие, пересечение L всех H_i является подгруппой конечного индекса в каждой из них и каждый смежный класс по H_i разбивается на конечное число классов по L . Из первоначального покрытия мы получаем покрытие из конечного числа смежных классов по L , следовательно, L имеет конечный индекс в G , как и каждая H_i .

□

Мы называем *примитивной* формулу вида $(\exists y_1) \ldots (\exists y_n)(\bigwedge E_i(\bar{x}, \bar{y}))$, где $E_i(\bar{x}, \bar{y})$ – равенства, т.е. формулы вида $\alpha_1 x_1 + \ldots \alpha_m x_m + \beta_1 y_1 + \ldots \beta_n y_n = 0$ с коэффициентами α_i и β_j из A . Заметим, что конъюнкция двух примитивных формул эквивалентна примитивной формуле (вынесите все кванторы вперед, после переименования связанных переменных так, чтобы они были разными у двух формул) .

Если M – A-модуль и $f(\bar{x})$ – примитивная формула от n свободных переменных, то кортежи, удовлетворяющие ей, образуют подгруппу, которую называют *примитивной* в M^n ; мы обозначим эту подгруппу через $G_{f(\bar{x})}$.

Назовем *примитивной формулой с параметрами* в M формулу $f(\bar{x}, \bar{a})$ полученную из примитивной формулы $f(\bar{x}, \bar{x}')$ без параметров подстановкой кортежа элементов из M вместо $\bar{x}'$. Заметим, что элементы M^n, удовлетворяющие $f(\bar{x}, \bar{a})$, образуют смежный класс по примитивной подгруппе $G_{f(\bar{x}, \bar{0})}$.

Теорема 6.26 *Пусть T – полная теория модулей и M – модель T , тогда два кортежа из элементарного расширения M имеют одинаковый тип над M если и только, если они удовлетворяют одним и тем же примитивным формулам с параметрами из M .*

Доказательство. Пусть N – ω-насыщенная модель теории $T(M)$ и $\bar{a}$, $\bar{b}$ – два кортежа, удовлетворяющие одним и тем же примитивным формулам с параметрами из M . Мы должны показать, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ∞-эквивалентны. Добавим, например, элемент c к $\bar{a}$. Если $f(\bar{x}, y)$ – примитивная формула с параметрами в M , выполняющаяся на $\bar{a}^\frown c$, то $(\exists y)f(\bar{x}, y)$ примитивна и выполняется на $\bar{a}$. Значит, она выполняется и на $\bar{b}$. Так как конъюнкция конечного числа примитивных формул снова примитивна, то множество всех формул $f(\bar{b}, y)$, где $f(\bar{x}, y)$ – примитивная формула с параметрами в M , выполняющаяся на $\bar{a}^\frown c$, совместно и по ω-насыщенности существует d из N, такой, что $\bar{b}^\frown d$ их всех удовлетворяет.

Значит мы имеем d, такой, что все примитивные формулы, истинные на $\bar{a}^\frown c$, истинны также на $\bar{b}^\frown d$. Нам нужно найти элемент e , имеющий это же свойство и кроме этого такой, что каждая примитивная формула, ложная на $\bar{a}^\frown c$, также ложна на $\bar{b}^\frown e$!

Если $f(\bar{m}, \bar{x}, y)$ – примитивная формула с параметром $\bar{m}$ из M, истинная на $\bar{a}^\frown c$, то мы хотим, чтобы e был конгруэнтным d по модулю $G_{f(\bar{0},\bar{0},y)}$.

Пусть теперь $g(\bar{m}, \bar{x}, y)$ – такая формула, ложная на $\bar{a}^\frown c$. Если существует $f(\bar{m}, \bar{x}, y)$, истинная на $\bar{a}^\frown c$, такая, что $N \vdash \neg(\exists y)(f(\bar{a}, y) \wedge g(\bar{a}, y))$, тогда то же самое верно при замене $\bar{a}$ на $\bar{b}$, удовлетворяющего тем же примитивным формулам, и нам ничего не надо требовать от e : простое выполнение им $f(\bar{b}, y)$ запрещает выполнение им $g(\bar{b}, y)$.

В противном случае, если $G_{g(\bar{0},\bar{0},y)} \cap G_{f(\bar{0},\bar{0},y)}$ конечного индекса n в $G_{f(\bar{0},\bar{0},y)}$, то покажем, что снова не надо требовать ничего от e . Действительно, так как две рассматриваемые подгруппы в M определимы без параметров, то это выражается в теории T модуля M . Тогда существуют $u_1, \ldots, u_n$ в M такие, что каждый элемент $G_{f(\bar{0},\bar{0},y)}$ конгруэнтен одному из $u_1, \ldots, u_n$ них по модулю $G_f \cap G_g$, т.е. смежный класс по первой подгруппе разбивается на n смежных классов по модулю второй. Значит, если элемент c' удовлетворяет $g(\bar{a}, y) \wedge f(\bar{a}, y)$, то c и c' конгруэнтны по модулю G_f и существует единственный u_i, такой, что $c + u_i$ и c' конгруэнтны по модулю G_g . Поэтому существует единственный u_i , такой, что $\bar{a}^\frown c$ удовлетворяет примитивной формуле $g(\bar{x}, y + u_i)$ с параметрами M . Если $\bar{a}^\frown c$ не удовлетворяет $g(\bar{x}, y)$, то это просто потому, что u_i не лежит в $G_{g(\bar{0},\bar{0},y)}$. Так как $\bar{b}^\frown d$ удовлетворяет той же формуле, простое удовлетворение $g(\bar{x}, y + u_i)$ запрещает ему выполнять $g(\bar{x}, y)$.

В оставшемся случае, существует элемент d_g , такой, что $\bar{b}^\frown d_g$ удовлетворяет $g(\bar{m}, \bar{x}, y)$ и мы хотим, чтобы e не был конгруэнтным d_g по модулю группы $G_{g(\bar{0},\bar{0},y)}$.

Подведем итог : мы имеем семейство G_f групп замкнутых относительно конечных пересечений и другое семейство G_g групп, таких, что $G_g \cap G_f$ всегда имеет бесконечный индекс в G_f . Мы хотим, чтобы e был конгруэнтным d по модулю каждой G_f и не был конгруэнтным d_g по модулю G_g для каждой G_g . Тогда по лемме 6.25 конечное объединение смежных классов по G_g не может покрыть класс по модулю G_f и то, к чему мы стремимся, совместно.

Однако в языке $T(M)$ условие, которое мы стараемся реализовать, выражается через выполнимость формул с параметрами только из $\bar{b}$. Действительно, d и d_g вовлечены только через их классы и вместо того, чтобы сказать, вовлекая параметр d, " x конгруэнтен d по модулю G_f ", можно сказать " x лежит в смежном классе по G_f элементов, удовлетворяющих f ", т.е. возвращаясь к нашей отправной точке " x удовлетворяет $f(\bar{b}, x)$ " ! Следовательно, поскольку N ω-насыщенна, такой e в N действительно существует.

□

Теперь попытаемся описать в удобной манере типы от одной переменной над моделью M для T : тип p элемента x над M определяется примитивными формулами $f(x, \bar{a})$ с параметрами $\bar{a}$ из M , удовлетворяющимися x . Если $p \vdash f(x, \bar{a})$, тогда $M \vdash (\exists x) f(x, \bar{a})$ и существует элемент a_f из M , удовлетворяющий эту формулу, и который, значит,конгруэнтен x по модулю $G_{f(x,\bar{0})}$. При других обозначениях, это означает, что тип p элемента x над M определяется конгруэнтностями $x \sim a \pmod{G}$, где a из M и G – примитивная подгруппа M , которым он удовлетворяет (поскольку G определяется формулой без параметра, то $x - a \in G$ есть формула нашего языка) .

Назовем семейство F примитивных подгрупп *фильтром подгрупп*, если выполняются следующие условия :

– M принадлежит F ,

– если G и H лежат в F , то их пересечение также лежит в F ,

– если G принадлежит F и $G \cap H$ конечного индекса в G, то H лежит в F.

Тип p из $S_1(M)$ определяет фильтр F_p примитивных подгрупп G таких, что существует a_G в M , конгруэнтность которого с x по модулю G выводима из p. Мы только что показали, что p определяется заданными F_p и a_G (или, более точно, их смежными классами по G).

Естественно, элементы a_G должны удовлетворять условию когерентности: если $G \subset G'$, тогда a_G и $a_{G'}$ конгруэнтны по модулю G' . Но это условие является единственным ограничением и каждый фильтр F имеет вид F_p , какой бы ни была модель M теории T . Действительно, по лемме 6.25 множество предложений выражающих, что x лежит в каждой подгруппе из F и не конгруэнтен ни с каким элементом по модулю любой примитивной подгруппы не лежащей в F , совместно.

Аналогично, если $p \in S_1(M)$ и $F_p \subseteq F'$, то существует элементарное расширение N модели M и *сын* q (смотри определение в разделе 11.a) типа p над N такой, что $F_q = F'$. Для этого реализуем тип p элементом a из некоторого расширения N и возьмем в качестве q тип, утверждающий, что x конгруэнтно a по модулю каждой G из F' и не конгруэнтно никакому элементу N по любой примитивной подгруппе вне F' .

Заметим наконец, что если p из $S_1(M)$ и M – элементарное ограничение N, то p имеет единственного сына q над N, такого, что $F_p = F_q$. На самом деле, так как q не добавляет новых классов к уже известным, у нас нет другого выбора. Этот сын называется *наследником* или сыном *без отклонения.* Другие, которые расширяют фильтр групп, называются сыновьями *с отклонением.*

Это вторая встреча с понятием отклонения[2] (первая была в 6.b) извещает о скором изучении стабильности в общих рамках, начиная с главы 11. Прежде чем полететь к таким высоченным вершинам, нам ещё нужно закончить уйму земных дел. Пока что мы хотим найти условие, при котором теория A-модулей, универсальная в данном уже нами языке, имеет модельный компаньон. Прежде чем перейти к обсуждению, мы хотим немного развить теорию модельных компаньонов, для которой модули служат прекрасной иллюстрацией.

Пусть M – структура и N – расширение M . Мы говорим, что M *экзистенциально замкнуто* в N , если для любого $\bar{a}$ из M и для любой бескванторной формулы $f(\bar{x},\bar{y})$ языка M , если $N \vdash (\exists\bar{y})f(\bar{a},\bar{y})$, то $M \vdash (\exists\bar{y})f(\bar{a},\bar{y})$.

Лемма 6.27 *Модель M экзистенциально замкнута в N тогда и только тогда, когда существует элементарное расширение M_1 модели M такое, что $M \subset N \subset M_1$.*

Доказательство. Если $M \prec M_1$, то M экзистенциально замкнуто в M_1 и, тем более, в N . Обратно, если M экзистенциально замкнуто в N , то выделим константой каждый элемент N и рассмотрим множество предложений $T(M) \cup D(N)$, где $T(M)$ – множество предложений, истинных в M, и $D(N)$ – множество бескванторных предложений, истинных в N. Это множество совместно, поскольку для каждого его конечного фрагмента мы можем интерпретировать константы $N \setminus M$ элементами из M ; оно имеет модель, являющуюся тем, что нам нужно.

□

Лемма 6.28 *Если M экзистенциально замкнуто в N и M_1 элементарно эквивалентна M , то существует экзистенциально замкнутое вложение M_1 в структуру N_1 , элементарно эквивалентную N .*

Доказательство. *1-ый метод* : для некоторого ультрафильтра U мы имеем $M_1 \prec M^U \subset N^U = N_1$; остается проверить, что M^U , как и M_1, экзистенциально замкнута в N^U .

2-ой метод : пусть T – теория N; выделим константой каждый элемент M_1 и пусть T_1 – множество универсальных предложений обогащенного языка, истинных в M_1 ; множество $T \cup T_1$ совместно, поскольку N можно превратить в модель для каждого его конечного фрагмента, выделив некоторые константы из M (так как, если $M_1 \vdash (\forall\bar{y})f(\bar{a},\bar{y})$, тогда $M \vdash (\exists\bar{x})(\forall\bar{y})f(\bar{x},\bar{y})$). Значит, это множество имеет модель , что нам и нужно.

□

Теперь рассмотрим универсальную теорию $T_\forall$; модель этой теории называется *экзистенциально замкнутой* (среди моделей $T_\forall$), если она является таковой в каждом её расширении, являющимся моделью $T_\forall$.

Лемма 6.29 *Любая модель $T_\forall$ вкладывается в экзистенциально замкнутую.*

[2]Примечание переводчика: в русской литературе чаще применяется термин ответвление.

Доказательство. Пусть M – модель $T_\forall$; пронумеруем формулы $f(\bar{x}, \bar{a})$ без квантора с параметрами в M ; если f_0 – первая формула и она реализуется в некотором расширении M, являющимся моделью $T_\forall$, то в качестве M^0 берем одну из них, иначе полагаем $M^0 = M$; и если f_1 реализуется в некотором расширении M^0 (будьте внимательны: возможно, что f_1 реализуется в некотором расширении M , но ни в одном расширении M^0), то в качестве M^1 берем одну из них и т.д. Повторяя эту процедуру, мы получим расширение M_1 модели M , являющееся моделью $T_\forall$ (поскольку выполнимость универсальных формул сохраняется при переходе к пределу), такую, что каждая бескванторная формула с параметрами в M , реализующаяся в некотором расширении M_1 , реализуется в M_1 .

Действуя таким образом, мы построим цепочку $M \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \ldots$, предел которой будет экзистенциально замкнутым.

$\square$

Лемма 6.30 *Элементарное ограничение экзистенциально замкнутой модели экзистенциально замкнуто.*

Доказательство. Если $M \prec M_1$ и M_1 экзистенциально замкнута и если $M \subset N$ – модель $T_\forall$, то существует модель $T_\forall$, расширяющая N и M_1 (так как каждое универсальное предложение с параметрами из M , истинное в N, истинно в M , значит оно истинно также в M_1 ; другое объяснение – можно вложить M_1 в ультрастепень M , не сдвигая M). Значит, если $\bar{a} \in M, \bar{b} \in N$ и $f(\bar{x}, \bar{y})$ – формула без кванторов, такая, что $f(\bar{a}, \bar{b})$ истинна (в N !), то она истинна в этом общем расширении, следовательно, $M_1 \vdash (\exists \bar{y}) f(\bar{a}, \bar{y})$ и $M \vdash (\exists \bar{y}) f(\bar{a}, \bar{y})$.

$\square$

Лемма 6.31 *Если каждое элементарное расширение экзистенциально замкнутой модели экзистенциально замкнуто, то каждое экзистенциально замкнутое расширение экзистенциально замкнутой модели элементарно.*

Доказательство. Пусть M и N экзистенциально замкнуты и $M \subset N$. По лемме 6.27 существует элементарное расширение M_1 модели M , такое, что $M \subset N \subset M_1$. Аналогично, существует элементарное расширение N_1 модели N , такое, что $M \subset N \subset M_1 \subset N_1$. Так как по предположению M_1 и N_1 экзистенциально замкнуты, то мы можем повторять эту процедуру и построить две сплетенные элементарные цепи $M \subset N \cdots \subset M_n \subset N_n \ldots$, общий предел P которых будет элементарным расширением и M и N . Предложение с параметрами в M истинно в N $\iff$ оно истинно в P $\iff$ оно истинно в N. Значит, N – элементарное расширение M .

$\square$

Упражнение 6.32 *Формула называется $\forall\exists$-предложением, если оно имеет вид $(\forall \bar{y})(\exists \bar{x}) f(\bar{y}, \bar{x})$, где $f(\bar{y}, \bar{x})$ – бескванторная. Если T – теория, то через $T_{\forall\exists}$ обозначается множество $\forall\exists$-предложений, выводимых из неё. Докажите, что если M – модель $T_{\forall\exists}$, то она экзистенциально замкнута в некоторой* *модели T и имеет элементарное расширение, являющееся пределом моделей T . Докажите, что T допускает аксиоматизацию $\forall\exists$-предложениями если и только, если каждый предел моделей T является моделью T .*

Ещё одно определение : класс L-структур называется *элементарным*, если он состоит в точности из моделей некоторой (не обязательно полной) теории T в этом языке.

Теорема 6.33 *Универсальная теория $T_\forall$ имеет модельный компаньон T тогда и только тогда, когда класс её экзистенциально замкнутых моделей элементарен и в этом случае T – их теория.*

Доказательство. Если экзистенциально замкнутые модели являются классом моделей теории T , то по лемме 6.29 T – компаньон $T_\forall$ и по лемме 6.31 T модельно полна.

Обратно, предположим что $T_\forall$ имеет модельным компаньоном T. Если M – модель T, N – модель $T_\forall$ и $M \subset N$, тогда N вкладывается в некоторую модель M_1 теории T . В силу модельной полноты T, расширение $M \subset M_1$ элементарно, так что M экзистенциально замкнуто в M_1 и тем более в N . Значит, все модели T экзистенциально замкнуты.

Если M экзистенциально замкнута, то она вкладывается в некоторую модель N для T , где она, конечно, будет экзистенциально замкнутой. Отсюда по лемме 6.27 имеем $M \subset N \subset M_1$, где M_1 – элементарное расширение M . Мы ещё не знаем, является ли M_1 экзистенциально замкнутой, но мы знаем по лемме 6.27, что она вкладывается экзистенциально замкнутым образом в некоторую модель N_1 теории T . Итерируя эту процедуру, мы получаем цепь моделей $M \subset N \subset M_1 \subset N_1 \cdots \subset M_n \subset N_n \ldots$, где цепь из M_n элементарна. Такой же будет цепь N_n по модельной полноте T . Общий предел этих цепей будет элементарным расширением и M и N , следовательно, M – модель T.

□

Применим этот замечательный результат к модулям. Модулем *конечного типа* назовем модуль имеющий конечную систему образующих (также говорят просто о *конечно порожденном* модуле), значит, он является образом свободного модуля A^n . Модуль называется *конечно представимым*, если он имеет вид A^n/R , где R – подмодуль A^n конечного типа. *Представление* M – это просто задание системы порождающих $e_1, \ldots, e_n$ для M и списка порождающих $r_1, \ldots, r_k$ модуля R отношений между $e_1, \ldots, e_n$. Заметим, что если M представимо в системе порождающих $e_1, \ldots, e_n$ с помощью отношений $r_1, \ldots, r_k$ и $f_1, \ldots, f_m$ – другое множество порождающих и через $e'_1, \ldots, e'_n$ обозначены выражения $e_1, \ldots, e_n$ через $f_1, \ldots, f_m$, то мы получаем представление M заменяя в $r_1, \ldots, r_k$ элементы $e_1, \ldots, e_n$ на $e'_1, \ldots, e'_n$ и добавляя к ним выражения $f_1, \ldots, f_m$ через $e'_1, \ldots, e'_n$. Мы видим таким образом, что если M конечно представим, то любая конечная система порождающих M имеет некоторое конечное представление.

Кольцо A называется *когерентным* (слева), если каждый (левосторонний) идеал в A конечного типа является конечно представимым (напомним, что идеал есть не что иное, как подмодуль в A). Например, если A нетерово (слева), то оно когерентно, так как каждый подмодуль A^n конечного типа.

Теорема 6.34 *Теория A-модулей имеет модельный компаньон, тогда и только тогда, когда кольцо A когерентно, в этом случае она допускает модельное пополнение, являющееся полным и допускающее элиминацию кванторов.*

Доказательство. Сначала предположим, что A не когерентно. Тогда существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из A, порождающие идеал, не имеющий конечного представления. Для любой конечной системы R отношений, выполняющихся для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, существуют $a_1, \ldots, a_n$ в некотором модуле, удовлетворяющие эти соотношения, но не все соотношения, выполняющиеся для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Возьмем модуль A^n/R , он может быть вложен в экзистенциально замкнутый модуль M_R . Так как $a_1, \ldots, a_n$ не удовлетворяют всем соотношениям для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не может существовать такой x , что $\alpha_1 x = a_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n x = a_n$.

Как следствие следующий список аксиом совместен :

- множество T предложений, истинных на всех экзистенциально замкнутых модулях,
- для любого соотношения $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n = 0$ для $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ предложение $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$,
- $\neg(\exists x)(\alpha_1 x = a_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n x = a_n)$.

Я утверждаю, что некоторая модель M этой теории не экзистенциально замкнута. Это влечет, что экзистенциально замкнутые модули не образуют элементарный класс. Действительно, поскольку $a_1, \ldots, a_n$ порождают модуль-образ идеала, порожденного $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, модуль $M \oplus Ax$, факторизованный отношениями $\alpha_1 x - a_1, \ldots, \alpha_n x - a_n$, будет расширением M .

Теперь предположим, что A когерентно. Рассмотрим следующий список аксиом, содержащий кроме аксиом A-модуля, для каждого идеала конечного типа в A , представленного соотношениями $r_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, r_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, и для каждых $\beta_1, \ldots, \beta_m$, не лежащих в идеале, порожденном $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, следующее предложение

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)(\exists z)(\bigwedge r_i(x_1, \ldots, x_n) \to$$

$$\to (\alpha_1 z = x_1 \wedge \ldots \alpha_n z = x_n \wedge \beta_1 z \neq y_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m z \neq y_m))$$

В случае нулевого идеала, представленного единицей, мы получаем следующую аксиому :

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)(\exists z)(0z = 0 \wedge \beta_1 z \neq y_1 \wedge \cdots \wedge \beta_m z \neq y_m)$$

Эти аксиомы выражают, что если $a_1, \ldots, a_n$ удовлетворяют соотношениям представления $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то кортеж $(a_1, \ldots, a_n)$ делится на кортеж $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем частное z удовлетворяет определенным неравенствам.

Возьмем, например, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. Так как идеал $n\mathbb{Z}$ как модуль изоморфен $\mathbb{Z}$, он нулевого представления, и получаем следующие аксиомы, где $n_1, \ldots, n_m$ не делятся на n :

$$(\forall x)(\forall y_1)\ldots(\forall y_m)(\exists z)(x = nz \wedge n_1 z \neq y_1 \wedge \cdots \wedge n_m z \neq y_m) .$$

Легко видеть, что моделями этой теории являются делимые группы, имеющие бесконечное число элементов порядка p для каждого простого числа p .

Этот список аксиом совместен и является компаньоном теории модулей. На самом деле, если $a_1, \dots, a_n$ удовлетворяют представлению R для $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то в модуле $M \oplus Az/(\alpha_1 z - a_1, \dots, \alpha_n z - a_n)$ справедливо $\beta z \in M$ в том и только в том случае, когда β лежит в идеале, порожденном $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Следовательно, каждый экзистенциально замкнутый модуль является моделью теории T .

Мы докажем, что T полна и допускает элиминацию кванторов. Для этого рассмотрим ω-насыщенные модели M и N теории T с кортежами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, порождающими изоморфные подмодули $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, мы должны показать, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ∞-эквивалентны.

Добавим c к $\bar{a}$, что определяет тип модуля, порожденного c и $\bar{a}$? Рассмотрим идеал I элементов α из A таких, что. $\alpha c = a_\alpha \in \mathcal{M}$. Этот модуль изоморфен $\mathcal{M} \oplus Ac$ факторизованному элементами $\alpha c - a_\alpha$.

Ясно, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из I , то $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}$ удовлетворяют представлению $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ из I . Для любого α из I обозначим через b_α элемент модуля $\mathcal{N}$, соответствующий a_α . Рассмотрим следующий список аксиом :

– $\alpha z = b_\alpha$ для всех $\alpha \in I$,

– $\beta z \neq b$ для всех $\beta \notin I$ и всех $b \in \mathcal{N}$.

Так как модуль N удовлетворяет аксиомам T , каждый конечный фрагмент этого списка выполняется некоторым элементом N . По компактности и ω-насыщенности существует элемент d из N , удовлетворяющий всему списку, и $\bar{a}^\frown c$, $\bar{b}^\frown d$ порождают изоморфные модули.

□

6.f Исторические и библиографические примечания

Элиминация кванторов для алгебраически замкнутых полей рассматривается в общем как теорема Тарского, появившаяся в [ТАРСКИЙ, 1951]. Просто скажем, что это перевод на современный жаргон старого метода решения системы полиномиальных равенств и неравенств с помощью последовательного исключения переменных. Его примеры находят начиная с самого появления математики в Вавилоне и он был объектом серьезного теоретического исследования со времен китайского средневековья (см. [ХОУ, 1977]). В этой работе Тарский показал также элиминацию кванторов для вещественно замкнутых полей (в языке с предикатом $\leq$). Эти последние относятся к вещественно полям так же, как алгебраически замкнутые поля к полям, т.е. удовлетворяют аналогу теоремы Гильберта о нулях, откуда понятно, что эта элиминация является фундаментальным фактом для вещественной геометрии – вещественного аналога алгебраической геометрии.

Более значительный успех теории моделей – это знаменитая теорема Акса и Кочена [АКС-КОЧЕН, 1966], которая при определенных предположениях позволяет свести теорию гензелевого поля к теории его поля классов вычетов и теории его группы значений. Этот результат является тем, чем часто любят размахивать знаменоносцы теории моделей. Действительно, он позволяет решить в конечном итоге гипотезу Артина. Это – первое свидетельство зрелости теории моделей, её первое неоспоримое приложение за узкими пределами логики. Последствия теоремы Акса-Кочена до сих пор занимают немало исследователей.

Другое значительное приложение – это порождение дифференциально замкнутых полей. Алгебра дифференциально замкнутых полей была интенсивно исследована Риттом в первой половине этого столетия, затем Эллисом Колчиным, который написал учебник [КОЛЧИН, 1973]. Важно заметить, что Колчин обращался к изолированному типу по имени "ограниченный идеал", однако ни он, ни Ритт нее думали о выявлении дифференциального аналога алгебраического замыкания. Заслуга в этом принадлежит Абрахаму Робинсону, который опираясь на работы Зейденберга [ЗЕЙДЕНБЕРГ, 1956] о методе исключения в системах дифференциальных равенств и неравенств, заметил что дифференциальные поля удовлетворяют необходимым условиям существования модельного пополнения – только что введенного им понятия, откуда родилось понятие дифференциально замкнутых полей. Представленная здесь крайне элегантная аксиоматизация этого понятия принадлежит Ленор Блюм [БЛЮМ, 1968]. Современная тенденция логиков – это вывод результатов Зейденберга об элиминации и синонимов теоремы о дифференциальных нулях из свойства модельной полноты теории дифференциально замкнутых полей, а не наоборот.

Существование и единственность дифференциального замыкания являются следствиями общей теоремы о тотальной трансцендентности рассматриваемой теории. Дифференциальный контекст, не приносит никаких упрощений в доказательство этих фактов, которое займет у нас много времени. Эти результаты также рассматриваются как важнейший вклад теории моделей в алгебру. Неминимальность дифференциального замыкания была одновременно доказана в работах [КОЛЧИН, 1974] , [ШЕЛАХ, 1973] и [РОЗЕНЛИХТ, 1974] . По этому поводу можете обращаться к [ГРАМЭН, 1983] и статьям соседствующим с ней.

Теория моделей дифференциально замкнутых полей подается изучению достаточно плохо, до сих пор остается открытым вопрос о классификации её счетных моделей. Теория дифференциально замкнутых полей характеристики p существует, она технически более сложна. Это – модельный компаньон, но не модельное пополнение теории дифференциальных полей характеристики p ; она описана Кэрол Вуд [ВУД, 1973] .

Булевы алгебры обязаны своим именем английскому математику Джорджу Булю (1815 – 1864) ; теорема представления доказана в [СТОУН , 1936] . Эти алгебры встречаются в логике везде. Для введения в алгебраическую логику я рекомендую книгу Хелены Расевой [РАСЕВА, 1974] и для её структурного изучения [СИКОРСКИЙ, 1964]. На самом деле, все пополнения теории булевых алгебр описаны.

Богатые ультраметрические пространства были предложены мной Франсуаз Делон [ДЕЛОН, 1984] для выявления сущности теоретико-модельных явлений, замеченных ею в теории нормированных полей; они дают отличные примеры и контрпримеры для иллюстрации многих вопросов этого курса.

Модули образуют достаточно широкий класс структур, теория моделей которых особенно проста. Лемма 6.25 принадлежит [НЕЙМАН, 1952]. Теорему 6.26 доказал Вальтер Баур [БАУР, 1976]. Можно доказать, вовлекая чуть больше алгебру, что на самом деле существует элиминация кванторов до булевых комбинаций примитивных формул даже при отсутствии модели M . Этот результат был доказан за несколько лет раньше Вандой Шмелевой для абелевых групп [ШМЕЛЕВА, 1955] . Можно описать все теории абелевых групп с помощью инвариантов Шмелевой.

Исследованиям экзистенциально замкнутых моделей мы обязаны Абрахаму Робинсону [РОБИНСОН, 1971]. Более детально о применениях к алгебраическим ситуациям можно прочитать в [МАКИНТАЙР, 1977] и особенно в [ЧЕРЛИН , 1976] . Про связь между модельным компаньоном и форсингом по Робинсону смотрите [РОБИНСОН, 1971] и [ХИРШФЕЛЬД-УИЛЕР, 1975] . Теорема 6.34 доказана Полем Эклофом и Габриелем Саббахом [ЭКЛОФ-САББАХ, 1970/71] .