Глава 8

Ординалы и кардиналы

Эта глава носит вспомогательный характер для теории моделей. Она написана для удобства читателя: каждый раз, до настоящего времени, когда вопросы касались "ординалов", "трансфинитной рекурсии", его просили допустить пригодность доказательств, предложенных по аналогии со счетным случаем, обещая ему более глубокое изложение впоследствии. Настала пора для этого изложения, так как со следующей главы нам нужны будут достаточно точные результаты об "арифметике кардиналов".

8.a Вполне упорядоченные множества

Полный порядок (или *полная цепь*) – это линейный порядок, в котором каждое не пустое подмножество имеет наименьший элемент. Говорят, что множество вполне упорядочено, если оно снабжено полным порядком. Например, пустой порядок, конечный порядок, порядок ω натуральных чисел являются полными порядками. Если A и B является полными порядками, то такими же будут и сумма $A+B$, и лексикографическое произведение $A\times B$, что читатель легко проверит в качестве упражнения. Каждый подпорядок полного порядка является полным порядком.

Напоминаем, что начальным сегментом порядка A называется его подмножество B, такое, что если a лежит в B , то любой меньший его элемент из A (миноранта для a) также лежит в B . Если множество A является полным порядком, то оно имеет два вида начальных сегментов: сам порядок A и начальные сегменты обозначаемые A_a , являющимися множествами элементов A , строго меньших a для некоторого $a\in A$. Мы видим таким образом, что полный порядок изоморфен множеству своих собственных начальных сегментов, упорядоченных по включению.

Лемма 8.1 *Пусть A и B – два полных порядка и f и g – два изоморфизма A на начальные сегменты B. Тогда $f=g$.*

Доказательство. Предположим что f и g различны. Тогда, пусть a – наименьший элемент из A, такой, что $f(a)\neq g(a)$. Допустим, например, что в B $f(a)<g(a)$. Так как $g(A)$ является начальным сегментом B , то найдется элемент $c<a$, такой, что $g(c)=f(a)$. Следовательно, по выбору a верно равенство $f(c)=f(a)$. Противоречие.

□

Эта лемма утверждает в частности, что если A является полным порядком, то тождественное отображение является единственным изоморфизмом A на начальный сегмент A , т.е. A не изоморфно ни одному из своих собственных начальных сегментов.

Лемма 8.2 *Пусть A и B – два полных порядка. Тогда существует изоморфизм одного из них на начальный сегмент другого.*

Доказательство. Предположим сначала, что для каждого a из A , A_a изоморфно собственному начальному сегменту B. По предыдущей лемме этот начальный сегмент единственнен, и мы обозначим его через $B_{f(a)}$. Тогда легко видеть, что отображение f является изоморфизмом порядка A на начальный сегмент B .

Обратно, пусть a – наименьший элемент A, такой, что A_a не изоморфен собственному начальному сегменту B . Для любого $b < a$ сегмент A_b изоморфен собственному начальному сегменту $B_{f(b)}$ порядка B . Мы видим, что f является изоморфизмом A_a на начальный сегмент B , который по определению A не может быть собственным. Отображение f является, таким образом, изоморфизмом между порядками A_a и B .

□

Для данных двух полных порядков A и B мы говорим, что *ординал A меньше ординала B* , в обозначении $ord(A) \leq ord(B)$, если A изоморфен начальному сегменту B. Не будем сейчас давать точный смысл слову "ординал". Мы рассматриваем $ord(A) < ord(B)$ в качестве готового выражения так же, как определяем понятие n-мерного пространства в алгебре, не сказав первоначально чем является размерность.

Ясно, что это отношение рефлексивно, транзитивно, и антисимметрично в следующем смысле : если $ord(A) \leq ord(B)$ и $ord(B) \leq ord(A)$ (в этом случае говорят, что A и B *имеют один и тот же ординал*), тогда A и B изоморфны. Действительно, если f является изоморфизмом A на начальный сегмент B , и g – изоморфизм B на начальный сегмент A , то $f \circ g$ и $g \circ f$ являются тождественными отображениями. Кроме того, по лемме 8.2 два полных порядка всегда сравнимы.

Мы определяем таким образом "отношение линейного порядка на ординалах". Для данного полного порядка A , ординалы, строго меньшие этого A , это ординалы собственных начальных сегментов A , которые соответствуют точкам A . Мы видим таким образом, что ординал отождествим с множеством всех ординалов, которые строго меньше его, снабженного их отношением естественного порядка.

Если хотите, можно под ординалом упорядоченного множества A понимать класс всех полных порядков, которые ему изоморфны. Однако,вообще так не поступают, так как существует технический способ в теории множеств, состоящий в выборе исключительного элемента из этого класса – ординала фон Неймана[1], который я собираюсь сейчас ввести.

Множество называется транзитивным, если каждый элемент является его подмножеством: в других терминах, a транзитивно, если каждый раз, когда $x \in a$ и $y \in x$, тогда $y \in a$. Например $\emptyset$ транзитивно, также как $\{\emptyset\}$. В более общих терминах, если a транзитивно, то $a \cup \{a\}$ также транзитивно. Говорят, что множество a является ординалом фон Неймана, если оно транзитивно и если отношение принадлежности $x \in y$ является строгим порядком, соответствующим полному порядку на a : $x \leq y$ означает, что $x \in y \vee x = y$, $x \in y$ означает $x \leq y \wedge x \neq y$, или $x < y$. Например $\emptyset$ является ординалом фон Неймана, который в этом контексте лучше обозначать через 0 ; $\{\emptyset\}$ – также ординал фон Неймана: его обозначают 1 ; также как и $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, обозначаемый 2 ; вообще, если a является ординалом фон Неймана, то таковым является и

[1]Джон фон Нейман – один из отцов атомной бомбы ; но не леммы 6.25

$a \cup \{a\}$.

Отметим, что элемент b ординала фон Неймана a сам является ординалом фон Неймана : b транзитивен, так как отношение принадлежности транзитивно между элементами a , и $(b, \in)$ является полным порядком, так как это – ограничение $(a, \in)$. Начальные сегменты ординала фон Неймана – он сам и его собственные начальные сегменты, которые являются также его элементами! Включение $a \in a$ невозможно, так как на отношение $x \in y$ является строгим порядком.

Лемма 8.3 *Изоморфизм между ординалами фон Неймана является тождественным отображением: если два ординала фон Неймана изоморфны (т.е. соответствующие им порядки изоморфны), то они равны.*

Доказательство. Пусть a и b – наши два ординала фон Неймана и пусть f не тождественный изоморфизм между a и b и c – наименьший элемент такой, что $f(c) \neq c$. Изоморфизм f отображает начальный сегмент элементов из a строго меньших c , на начальный сегмент порядка b , состоящий из элементов, строго меньших $f(c)$. Следовательно, c и $f(c)$ являются двумя множествами, которые имеют одни и те же элементы, которые таким образом равны. Противоречие.

□

Лемма 8.4 *Каждый полный порядок изоморфен некоторому ординалу фон Неймана.*

Доказательство. Пусть A – вполне упорядоченное множество. Предположим, что существует x в A такой, что A_x не изоморфен ординалу фон Неймана, и пусть a наименьший среди них. Тогда для каждого $x < a$ по лемме 8.3 существует единственный изоморфизм, между A_x и ординалом фон Неймана x' . Если $x < y < a$, то обязательно x' является начальным сегментом y' ,являющимся образом x при изоморфизме между y и y' , иначе говоря $x' \in y'$. Тогда мы видим, что множество элементов вида x' образует ординал фон Неймана, и что оно изоморфно A_x . Противоречие.

Мы поняли, что каждый собственный начальный сегмент полного порядка изоморфен ординалу фон Неймана. Для завершения доказательства достаточно отметить, что A является собственным начальным сегментом $A + 1$ – порядка, полученного из него добавлением точки справа.

□

Таким образом, ординалом упорядоченного множества A называется единственный изоморфный ему ординал фон Неймана. Встречаются студенты, которые испытывают аллергию к ординалам, определяемым как "типы полных порядков", и находят более удобоваримым понятие ординала фон Неймана. Вот вам странное последствие догматического образования, которое путает формализм со строгостью и выдвигает вперед техническую хитрость в ущерб основной идее: надо иметь странно искаженный разум, чтобы найти естественным понятие транзитивного множества!

Ординал фон Неймана является множеством всех меньших его ординалов (фон Неймана; я не собираюсь больше таскать это имя повсюду). Его элементы являются также и его собственными начальными сегментами. Естественный порядок, то есть принадлежность или равенство, образует род полного порядка на ординалах. Я говорю "род", так как ординалы образуют слишком широкий класс чтобы быть множеством. Обычно дают такое объяснение : иначе, они бы образовали ординал, который бы принадлежал самому себе и, значит, был бы меньше самого себя, что невозможно. Для ординалов справедлив следующий принцип индукции:

Если существует ординал, удовлетворяющий некоторому свойству P, то существует наименьший такой ординал.

Пусть, действительно, a – ординал, удовлетворяющий P . Если он наименьший, то все доказано. Иначе, множество элементов a , которые удовлетворяют P , не пусто и значит имеет наименьший элемент b , который удовлетворяет свойству P . Этот принцип может быть изложен также в следующем виде:

Если для каждого ординала x тот факт, что все $y < x$ удовлетворяют свойству P влечет, что x также удовлетворяет P , тогда все ординалы удовлетворяют P .

Если ординал имеет наибольший элемент a , он таким образом имеет вид $a \cup \{a\}$, то говорят, что он *последователь*; иначе, говорят что он *предельный* . Предельный ординал является объединением, или еще верхней гранью, всех меньших ординалов[2].

В доказательствах по индукции часто случается, что нужно рассматривать два случая, в зависимости от того, что обсуждаемый ординал последователь или предельный. Из-за предельных ординалов индукция не сводится как в арифметике, к переходу от ординала к своему последователю (если применять обозначения 7.g , то I' и I" единственные удовлетворительные в контексте ординалов формы аксиом индукции; форма I неверна).

Ординал называется *конечным*, если все ненулевые ординалы, меньшие или равные ему, являются последователями; пример: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,... Мы убеждаемся что понятие конечного ординала является переводом, на теоретико-множественные термины, неформального понятия натурального числа. Наименьший бесконечный ординал, который является наименьшим предельным ненулевым ординалом, и порядок которого изоморфен естественному порядку натуральных чисел обозначается ω или $\aleph_0$. Впрочем, обсуждаемый изоморфизм является тождественным отображением, так как, по соглашению фон Неймана, ω есть множество натуральных чисел, и его порядок является порядком натуральных чисел.

Другое применение индукции это построения трансфинитной рекурсией. Для данного ординала x описывают способ который позволяет строить однозначно определенный объект M_x , предполагая,что для каждого $y < x$ такой M_y уже построен. В таких рассуждениях основным шагом от противного является рассмотрение наименьший ординала x , для которого не существует объекта M_x .

Иногда довольствуются построением для x , меньших фиксированного ординала a . Примеры таких построений трансфинитной рекурсией, мы увидели

---

[2]Внимание: любой ординал, как последователь так и предельный, является *множеством* всех меньших ординалов

в 1.c для производных топологического пространства и для α-изоморфизмов. Мы собираемся трансфинитную рекурсию использовать и для доказательства следующего утверждения.

Лемма 8.5 *Пусть A полный порядок, и B ограничение (не обязательно на начальный сегмент!) A . Тогда $ord(B) \leq ord(A)$.*

Доказательство. Пусть β ординал B , с которым мы его можем отождествить. Рассмотрим функцию f из β в A , определенную такой рекурсией : $f(x)$ есть наименьший элемент A , больший всех $f(y)$ для $y < x$, если он существует, иначе, $f(x)$ – наименьший элемент A . Легко видеть по индукции, что $f(x) \leq x$, так что $f(x)$ всегда наименьший элемент A , больший всех $f(y)$ для $y < x$. Второй случай был только ораторской предосторожностью, чтобы функция f определялась. Эта функция является изоморфизмом B на начальный сегмент A , который может быть и самим A , даже если B является собственным подмножеством A.

□

8.b Аксиома выбора

Теорема 8.6 (Цермело) *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Если множество A пусто, то оно вполне упорядочено. Если оно не пусто, то имеет элемент, пусть a_0 . Если множество A этим не исчерпывается, то оно имеет другой элемент a_1 , продолжая по индукции эту процедуру, сопоставляем каждому ординалу β элемент a_β из A до тех пор пока для некоторого ординала α множество a_β, $\beta < \alpha$, не совпадет целиком с A . При этом каждый элемент a_β выбирается отличным от всех предыдущих. Построение должно обязательно остановиться, так как ординалы полных порядков, которые можно определить на подмножестве A образуют множество, в то время как класс всех ординалов не образует множество. Когда мы остановимся, то получим полное упорядочение множества A .

□

Доказательство этой теоремы является, конечно, мошенничеством, так как каждый знает, что эта теорема эквивалентна аксиоме выбора, и что аксиома выбора не является следствием "других" аксиом теории множеств. Это последнее высказывание имеет действительный смысл только, если мы уточним другие аксиомы, то есть если выберем формальную теорию множеств, например, теорию Цермело-Френкеля ZF.

Здесь появляется методическая проблема; мы могли бы, в предыдущей главе, выбрать аксиоматическую рамку, дать пример списка аксиом Пеано, и работать только внутри этой системы. Это не было сделано, так как всегда под рукой имеется естественная модель арифметики, полученная из *настоящих* натуральных чисел. Мы верим в существование множества истинных предложений для настоящих натуральных чисел , даже после того как отдаем себе отчет, что это множество имеет достаточно сложное определение. И потом, после определенной работы, мы поняли, что аксиомы Пеано составляют только очень слабое приближение к этой настоящей арифметике. Естественный подход к арифметике является следующим: "Мы имеем числа, и пытаемся их описать". Но множества, что это такое?

Если для множеств ситуация другая, то это потому, что *не существует естественной модели теории множеств*. Что является настоящими множествами, в сущности, никто не знает. Так, что мы находимся в несколько затруднительном положении. Нам нужно задать список разумных аксиом, в том смысле, что, если бы настоящие множества существовали, они бы удовлетворяли, вероятно, этим аксиомам то, что очевидно очень субъективно, и затем выявлять последствия этой аксиоматики. Но проблема в том, что эта теория множеств нас касается ещё больше чем арифметика, так как мы можем определить в терминах множеств всю нашу математику, а не только комбинаторику, и что мы использовали на менее формальным уровне эту же теорию множеств чтобы изучить теорию множеств! Перевод каждого математического понятия на язык множеств настолько прямой и настолько естественен по крайней мере для математика этого века, что он служит подводным камнем для начинающего логика. Случается он смешивает понятия, внутренние относительно модели и те, что внешние: когда он изучает арифметику, где переводы осуществляются достаточно искусственными кодированиями, он лучше защищён от этой неясности.

Можно дать аргумент, объясняющий невозможность существования естественной, абсолютно убедительной модели теории множеств. Если бы она существовала, то была бы множеством M , снабженным бинарным отношением принадлежности, которое было бы что–то вроде элементарного ограничения мира, в котором мы живем. Но, поскольку выполнимость предложения в M легко определяется в теории множеств, то мы имели бы определение истинности внутри этой теории, что опровергается теоремой Тарского.

Этот аргумент не так силён: приложенный к арифметике, он доказывает всего лишь, что множество натуральных чисел бесконечно. Понятно, что эта естественная "модель" теории множеств должна была бы быть высшего типа, что–то вроде предела определяемых вещей в этой теории. И на самом деле ZF имеет модели этого типа – модели "кумулятивной иерархии", так что нам гарантирована непротиворечивость ZF, хотя естественно она не доказуема в ZF.

Но так как никто не имеет ясного представления хотя бы об одной модели этого типа, способной служить абсолютным ориентиром для математической мысли, вопрос знания, верна ли аксиома выбора, не имеет большого смысла. Напротив, мы не без сомнения утверждаем что $Cons$(Пеано) верна, хотя она не доказуема в системе Пеано. Единственный разумный вопрос, это спрашивать, является ли она следствием данной системы аксиом или нет, или совместна ли она с этой системой. Действительно, по теореме Гёделя, рассматриваемые системы не могут доказать собственную непротиворечивость. Но они могут доказать *относительную* непротиворечивость аксиомы выбора. Доказываем *в* ZF, что если ZF совместна, тогда ZF + *Аксиома выбора* совместна, так же впрочем, как и ZF с отрицанием аксиомы выбора. Эти и другие проблемы такого типа, дали толчок развитию плодотворной и очень специфической отрасли логики "теории множеств", которая выходит целиком за рамки этого труда. Мы могли бы впрочем настоятельно советовать читателю рассматривать её только приобретя прочные знания в теории моделей, которая является основанием логики. Однако, так как после Кантора мы купаемся в множествах, их нельзя избежать, и мы собираемся, оставаясь по возможности неформальными, немного углубиться в свойства этих гипотетических множеств.

Эта "неформальная теория" – в высшей степени антиномичный объект, тем не менее испытывает сильное влияние аксиоматики Цермело-Френкеля, подспудная метафизическая идея которой состоит в том, что множества являются "маленькими" по отношению к миру. Например, дополнение множества не может быть множеством. Теория множеств развивается обычно в этой аксиоматике. Сказать, что это естественная рамка математической мысли, это очень рискованно. Однако, это точно, что она становится все более и более таковой, так как математическая практика, ежедневная теоретико-множественная концепция математиков все более и более испытывает влияние ZF.

Можно впрочем понять, что глубокие теоремы теории множеств, доказанные по поводу ZF, остались бы действительными и в другой системе. Среди этих других систем, относительный успех имели – система BG Геделя-Бернайса, похожая на ZF, и система NF New Foundations Куайна, которая основывается на совершенно другой идее.

Мы собираемся теперь доказать эквивалентность различных классических форм аксиомы выбора. Чтобы сделать это доказательство совершенно строгим, надлежало бы уточнить какие аксиомы допускаются, то чего мы не делаем: читатель убедится, что свойства множеств, которые используются неформально, допустимы.

1. *Аксиома выбора.* Для каждого множества A , существует функция f из множества не пустых подмножеств A в A , которая каждый не пустой элемент A отображает в один из своих элементов (говорят, что f является *функцией выбора* на A).

2. *Аксиома выбора* (2-ая форма). Пусть R отношение эквивалентности на A . Тогда существует подмножество B в A , которое содержит ровно по одному элементу в каждом классе разбиения, соответствующего R .

3. *Аксиома выбора* (3-я форма). Произведение не пустых множеств не пусто.

4. *Аксиома Цермело.* Каждое множество может быть вполне упорядочено.

5. *Аксиома Хаусдорфа.* В частичном порядке, каждая цепь (т.е. каждое линейно упорядоченное подмножество этого частичного порядка) содержится в максимальной цепи.

6. *Аксиома Куратовского.* (Напоминаем что частичный порядок называется *индуктивным*, если каждая цепь имеет в нем верхнюю грань). В частичном не пустом индуктивном порядке имеется по крайней мере один максимальный элемент.

7. *Аксиома Куратовского* (2-ая форма). В частичном индуктивном порядке каждый элемент мажорируется некоторым максимальным элементом.

Аксиома Куратовского более известна под именем аксиомы *Цорна*, хотя последний высказал её более чем через 20 лет после Куратовского. Это ошибочное присвоение обязано энтузиазму Бурбаки, испытывавшему к этой аксиоме пристрастие, которая позволяла (не всегда естественным способом) избегать трансфинитных рекурсий.

Доказательство (избыточное).

$1 \Longleftrightarrow 2$

$1 \Longrightarrow 2$ так как функция выбора f на A выделяет из каждого класса по представителю, то берем в качестве B f-образ множества классов R . Чтобы показать $2 \Longrightarrow 1$, рассмотрим подмножество множества $P(A) \times A$, образованное из пар (X, x) таких, что $x \in X$ ($P(A)$ обозначает множество подмножеств A) и на этом множестве определим отношение эквивалентности R "иметь одни и те же первые координаты". Пусть B множество представителей классов по модулю R , существующее по аксиоме 2 . Следующая функция f является функцией выбора на A : каждому не пустому подмножеству X в A сопоставляется класс по модулю R , образованный из пар с первой координатой X , и в качестве $f(X)$ берут вторую координату единственного элемента этого класса, лежащего в B .

$1 \Longleftrightarrow 3$

В этом случае сказать, что существует функция выбора значит показать, что декартово произведение не пустых подмножеств A не пусто. Если $(\ldots, A_i, \ldots)$ является семейством не пустых множеств, то ограничение функции выбора на $\cup A_i$ на это семейство и есть элемент их произведения.

$1 \Longleftrightarrow 4$

Если множество A вполне упорядочено, то отображая каждое не пустое подмножество A на свой наименьший элемент относительно этого полного порядка, получаем функцию выбора. Чтобы доказать обратную импликацию мы повторяем доказательство теоремы 8.6, недостаток которой заключался в отсутствии действительного описания a_α . Предполагая, что известны все элементы a_β, $\beta < \alpha$, мы теперь располагаем функцией выбора на A , которая позволяет определить однозначно a_α в зависимости от элементов a_β , где $\beta < \alpha$. Если $\{\ldots, a_\beta, \ldots\} = A$, то останавливаемся. В противном случае a_α является значением f на дополнении в A этого множества.

$6 \Longleftrightarrow 7$

В индуктивном порядке мажоранты элементов образуют не пустой индуктивный порядок.

$5 \Longleftrightarrow 7$

Цепи частичного порядка, упорядоченные по включению, образуют индуктивное множество. Если мы рассмотрим в индуктивном множестве максимальную цепь C , продолжающую цепь из одного элемента a , эта цепь имеет мажоранту b, которая может быть только её наибольшим элементом, и он максимален.

$6 \Longleftrightarrow 4$

Пусть A множество, тогда обозначим через B множество полных порядков, определенных на подмножествах A . Это множество не пусто, так как оно содержит полный порядок $\emptyset$. Упорядочиваем B следующим образом: $a \leq b$, если a является начальным сегментом b . Нетрудно видеть, что это индуктивный порядок : цепь мажорируется общим расширением каждого из своих элементов, определенного на объединении их носителей (это общее расширение является полным порядком, в котором каждый элемент является начальным сегментом). Пусть тогда a максимальный элемент B . Я утверждаю, что a совпадает с A . Действительно, если это не так, то существовал бы элемент x из A помимо базы a . Тогда мы могли бы продолжить порядок a , полагая, что x больше каждого элемента носителя a , что противоречит максимальности a.
$1 \Longleftrightarrow 7$

Пусть a произвольный элемент из A . Определим индукцией по ординалу α последовательность a_α элементов индуктивного порядка A , предполагая что A снабжен функцией выбора. Полагаем $a_0 = a$. Далее, если $\alpha = \beta + 1$, и a_β максимален, то останавливаемся. Если это не так или ординал α пределен, то цепь $\{\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$ имеет не пустое множество M точных мажорант (в предельном случае, она не имеет наибольшего элемента). Тогда полагаем $\mathrm{a}_{alpha} = f(M)$. Построение должно остановиться, так как мы не можем отобразить инъективно класс всех ординалов в множество. Поясним для тех кто знает ZF , что это является следствием схемы аксиом замещения и того факта, что ординалы не образуют множество. Остановка означает, что мы нашли нашу максимальную мажоранту для a .

$\square$

Аксиому выбора математики не любят. Они её предпочитают использовать в форме Куратовского-Цорна, например чтобы показать существование максимальных идеалов в кольце с единицей, так как эта аксиома им кажется более материально осязаемой. С аксиомой выбора, они не понимают того, что надо показать. Так как они испытывают отвращение к построениям трансфинитной рекурсией, то они суют эту аксиому Куратовского-Цорна куда попало, что часто их обязывает к акробатическим трюкам. Сколько имеется учебников алгебры, которые для доказательства теоремы о том, что любые два базиса векторного пространства бесконечной размерности имеют одно и то же число элементов, используют её вариант для подпространств конечной размерности, вместо того, чтобы прямо доказать трансфинитную версию леммы о замене! (См. 19.11) .

Аксиому выбора часто плохо понимают: чтобы найти элемент в непустом множестве она не нужна! Действительно, если это множество не пустое, то это потому, что оно имеет по крайней мере один элемент! Проблема в следующем: если мы имеем семейство множеств, про которое индивидуально знаем, что каждое не пусто, то ничто не обеспечивает существование функции выбора, в некотором роде единообразной и общей процедуры, показывающей что все они не пустые. Это нюанс между понятиями "каждый" и "все"! Если у вас аллергия к этой метафизике, вам следует потрудится над теорией множеств, и изучить доказательство (трудное) независимости аксиомы выбора от других аксиом ZF .

Чтобы разъяснить идеи нашему читателю, покажем без аксиомы выбора что произведение конечного числа не пустых множеств не пусто: это доказывается рекурсией по числу n . По гипотезе индукции, мы имеем функцию f с областью определения $[0, n-1]$, которая i сопоставляет элемент из A_i . Так как A_n не пусто, то оно имеет элемент a , тогда продолжим f , полагая $f(n) = a$.

Аксиома конечного выбора не является на самом деле аксиомой, это теорема, которая доказывается из других аксиом. Напротив, существуют ослабленные формы аксиомы выбора, которые не может выведены из них; примером является *аксиома счетного выбора*, которая утверждает, что если $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ счетная совокупность не пустых множеств, то их произведение не пусто. Другой пример следующая *аксиома зависимого выбора*: пусть A непустое множество, а R бинарное отношение на A такие, что для каждого а из A существует b из A такой, что (a, b) удовлетворяет R ; тогда существует последовательность a_n элементов A (т.е. отображение ω в A) такая, что для каждого n (a_n, a_{n+1}) лежит в R . Сравните это утверждение с 7.17.

Эта последняя аксиома выводится легко, если мы располагаем функцией выбора на A , например, если A вполне упорядочено. Таким образом, она следствие аксиомы выбора. Такая аксиома позволяет доказать аксиому счетного выбора. Действительно, рассмотрим бинарное отношение R , определенное на объединении A множеств A_n таким образом : (a, b) удовлетворяет R если для некоторого целого n a в A_n и b в A_{n+1} . В теории множеств доказано (это трудно!), что она строго сильнее чем аксиома счетного выбора.

Аксиома счетного выбора постоянно используется в анализе; её часто ловко скрывают, чтобы не сеять смуту в сознании студентов, предрасположенных допускать все что угодно, и профессоров, не любящих расшатывать основания науки. Например, чтобы показать что счетное объединение множеств меры 0 само является множеством меры 0 используют следующую цепочку рассуждений. Каждое множество A_n содержится в открытом множестве O_n меры меньшей $\varepsilon/2^{n+1}$. Таким образом $\mu(\cup A_n) \leq \sum \mu(O_n) \leq \sum \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon$. Я с такими выкладками согласен, но заметим, что здесь необходимо *выбрать* для каждого n окрестность O_n среди всех тех, которые удовлетворяют условию.

Давайте будем без иллюзий: без аксиомы выбора, мы не сможем даже доказать, что произведение счетного семейства множеств A_n имеющих каждое по два элемента, не пусто! Однако, если $A = \{0, 1\}$, то A^ω не пусто, так как оно содержит нулевую последовательность. Может показаться, что так как каждое A_n находится в биекции с A, то A^ω находится в биекции с $\prod A_n$ и, следовательно, мы докажем непустоту указанного декартова произведения. Это – ошибка, так как чтобы строить такую биекцию, надо для каждого n выбрать одну биекцию между A и A_n среди двух возможных. Как замечательно сказал Бертран Рассел, это – разница между семейством пар носков и семейством пар ботинков: для последнего мы имеем функцию выбора, которая состоит в том чтобы всегда брать левый ботинок.

Существование полного порядка на множестве действительных чисел может быть обеспечено только аксиомой: это – предмет веры, мы не можем его считать "естественным". Оно имеет весьма неприятные последствия для анализа, так как производит странные множества, которых мы никогда не встретим, как базис R , рассматриваемого в качестве векторного пространства над Q , или не измеримое по Лебегу множество.

Таким образом, хороший выбор (если можно так выразиться) для математического анализа допускать аксиому счетного выбора, или зависимого выбора, и отклонить аксиому общего выбора, заменив её напротив более приятными аксиомами, которые ей сильно противоречат. Это необходимо для того, чтобы сохранить человеческое лицо анализа, не вводя экзотические множества (не будет никакого интереса к теории множеств действительных чисел, если будет неверно, что объединение счетного семейства множеств меры 0 имеет меру 0) . Этот выбор полностью прагматический, так как метафизические основания, которые можно давать для принятия или отклонения аксиомы счетного выбора, также действительны для аксиомы общего выбора.

В алгебре, а также в теории моделей, которая близка к алгебре, *напротив допускают аксиому выбора.* И почему же? *Потому что она упрощает жизнь.* Все векторные пространства будут иметь базис, поля имеют базис трансцендентности, кольца с единицей максимальный имеют идеал. Аксиома выбора абсолютно необходима для первых глав этого курса. Мы фактически её использовали чтобы доказать теорему Левенгейма, где имеются выборы a_i , ловко скрытые автором, для теоремы компактности и при применении ультрафильтров, и при применении метода Генкина, для определения понятия доказательства,..., короче, она необходима почти везде. Если бы мы её не предполагали, то нам надо было бы отягощать условия теорем, уточняя каждый раз, что некоторые множества вполне упорядочены, или определены особым способом. Это полностью бесполезное осложнение, не связанное с предметом нашего изучения.

Например, мы использовали *аксиому ультрафильтра:* каждый фильтр подмножеств A продолжается до ультрафильтра. Так как фильтры, упорядоченные включением, образуют индуктивное множество (объединение цепи фильтров является фильтром, так как оно не содержит $\emptyset$), это прямое следствие аксиомы выбора. В теории множеств доказано, что аксиома ультрафильтра строго слабее чем аксиома выбора.

Аксиома ультрафильтра достаточна, чтобы доказать теорему Тихонова, которая утверждает что каждое произведение компактных пространств компактно (в французской литературе принято считать, что компакт удовлетворяет условию отделимости Хаусдорфа). В построениях рекурсией, которые мы проводили, наше поведение было часто типичным для тех, кто допускают аксиому выбора: мы определяли a_α как элемент некоторого множества A , не уточняя какого. Просто потому, что подразумевали, что берем то, что дано функцией выбора, и что бесполезно это повторять все время. Одним словом, в этой книге, аксиома выбора рассматривается как верная.

8.c Кардиналы

Теорема 8.7 (Кантор) *Если существует инъекция f из A в B , и инъекция g из B в A , то существует биекция между A и B .*

Доказательство. Мы говорим, что элемент a $\in A$ или $b \in B$ первого вида, если он имеет следующее свойство: если например это a из A, то он в образе g и $g^{-1}(a)$ в образе f , а $f^{-1}(g^{-1}(a))$ в образе g , и т.д., то есть когда мы поднимаемся начиная с элемента по прообразам, поочередно из f и из g , никогда не останавливаемся.

Мы говорим, что он второго вида, если когда таким образом поднимаемся, то остановимся на элементе A , который не лежит в образе g и, что он третьего вида, если поднимаясь остановимся на элементе B , который не в образе f .

Рассмотрим отображения φ из A в B , и ψ из B в A , определенные таким образом :

- если a первого или второго вида, то $\varphi(a) = f(a)$,
- если X - третьего вида, то $\varphi(a) = g^{-1}(a)$,
- если b - первого или третьего вида, то $\psi(b) = f^{-1}(b)$,
- если b - второго вида, то $\psi(b) = f^{-1}(b)$.

Так как $\varphi \circ \psi = Id_B$, $\psi \circ \varphi = Id_A$, то φ и ψ являются двумя взаимно обратными биекциями.

□

Обозначим через 2^A множество подмножеств A . Это множество можно отождествить с множеством функций из A в множество $2 = \{O, 1\}$ если сопоставить подмножеству в A его характеристическую функцию.

Теорема 8.8 (Бернштейн) *Каково бы ни было множество A , не существует сюръекции из A на 2^A .*

Доказательство. Пусть f сюръекция A на 2^A , тогда полагаем $X = \{a : a \in f(a)\}$. Так как X лежит в образе f , то для некоторого элемента $a_0 \in A$ будет $X = f(a_0)$. Тогда, если $a_0 \notin X$, то $a_0 \in X$, и если $a_0 \in X$, то $a_0 \notin X$. В обеих случаях имеем противоречие.

□

Отметим, что эти две теоремы доказаны без использования аксиомы выбора. Мы говорим, что *кардинал множества* A меньше кардинала множества B , в обозначении $card(A) \leq card(B)$, если существует инъекция A в B (рассматриваем сейчас $card(A) \leq card(B)$ в качестве готового выражения). Это отношение явно транзитивно: $card(A) \leq card(B)$ и $card(B) \leq card(C)$ влечет $card(A) \leq card(C)$. Если $card(A) \leq card(B)$ и $card(B) \leq card(A)$, тогда говорят, что A и B имеют один и тот же кардинал дело в том, что тогда по 8.7 существует биекция между A и B . По 8.8, кардинал 2^A строго больше кардинала A , так как существует инъекция A в 2^A та, которая каждый элемент a из A отображает на соответствующее одноэлементное подмножество $\{a\}$.

Отметим, что если $card(A) \leq card(B)$ и A не пусто, то существует сюръекция g множества B на A . Действительно, если f инъекция A в B и a произвольный элемент A , то полагаем $g(b) = f^{-1}(b)$, если b в образе f , и $g(b) = a$ в противном случае .

Это именно приблизительно все то, что можно сказать о кардиналах в отсутствии аксиомы выбора. В частности, нельзя доказать, что два кардинала всегда сравнимы и что, если существует сюръекция A на B , то $card(A) \geq card(B)$. С этого момента, мы работаем с аксиомой выбора. Если f является сюръекцией A на B , то каждый элемент b из B мы отображаем, функцией выбора на A , на некоторый элемент из $f^{-1}(b)$. Таким образом мы определяем инъекцию B в A , значит $card(A) \geq card(B)$.

Если A и B является произвольными множествами, то их можно вполне упорядочить, первый ординалом α , второй ординалом β . Если α является начальным сегментом β , то из этого получаем инъекцию A в B , если же β является начальным сегментом α , то получаем инъекцию B в A . Так как два ординала всегда сравнимы, то всегда имеем $card(A) \leq card(B)$ или $card(B) \leq card(A)$.

Кардиналом множества A называется наименьший ординал α такой, что на носителе A существует полный порядок типа α . Кардинал множества A обозначается равным образом как $card(A)$ или $|A|$. Кардинал, это ординал фон Неймана, который не может находится в биекции, не обязательно растущей, ни с каким из своих собственных начальных сегментов. Из-за этого, кардиналы иногда называют *начальными ординалами.*

Например 0,1,2,... и все конечные ординалы являются кардиналами. Ординал ω является кардиналом, а $\omega + 1$ не является кардиналом, так как он находится в биекции с ω (отобразите ω на 0 и n на $n+1$) . Множество имеющее кардинал ω называется *счетным.* Иногда, по контексту, "счетный" означает "конечный или счетный". Наименьший несчетный ординал является кардиналом. Так как $card(\omega + 1) = \omega$ и все бесконечные ординалы начинаются с ω , то заметим, что бесконечный кардинал является предельным ординалом: добавление точки к бесконечному множеству не увеличивает его кардинал.

Если κ кардинал, то через κ^+ обозначим наименьший кардинал строго, больший κ . Кардинал κ^+ часто называют *последователем* кардинала κ . Обратите внимание, что если κ бесконечно, то κ^+ не является последователем κ в качестве ординала. По теореме 8.8 $\kappa^+ \leq 2^\kappa$, где 2^κ обозначает кардинал множества подмножеств множества кардинала κ .

Континуум-гипотеза является следующей аксиомой: $\omega^+ = 2^\omega$. Обобщенная континуум-гипотеза утверждает, что для каждого бесконечного кардинала κ , выполняется равенство $\kappa^+ = 2^\kappa$. Из неё следует, что для любых бесконечных множеств A, B , если A вложимо в B и B вложимо в 2^A , то A находится в биекции с B , или B находится в биекции с 2^A . Обобщенная континуум-гипотеза в этой последней форме влечет аксиому выбора. Этот результат получен Серпинским; но континуум-гипотеза независима от ZF + аксиома выбора (результаты Геделя и Коэна). В теории моделей обычно не предполагают континуум-гипотезу, слишком упрощающую арифметику кардиналов. Обычно стараются доказать теоремы без нее; и если где-нибудь её используют, то впоследствии пытаются от неё отказаться.

Индукцией по ординалу α мы определяем последовательность $\aleph_\alpha$ таким образом[3]: $\aleph_\alpha$ является наименьшим бесконечным кардиналом строго большим каждого $\aleph_\beta$ для $\beta < \alpha$. Так $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega^+$ (иногда обозначают также через ω_1) и т.д. , $\aleph_\alpha$ есть " α-ый бесконечный кардинал". Мы получаем таким образом индексацию всех бесконечных кардиналов ординалами: на самом деле легко видеть, что кардинал κ меньше или равен $\aleph_\kappa$, таким образом он имеет вид $\aleph_\alpha$, для некоторого $\alpha \leq \kappa$.

Так же определяем последовательность $\beth_\alpha$ кардиналов[4]: если $\alpha = \beta + 1$, то $\beth_\alpha = 2^{\beth_\beta}$, $\beth_0 = \omega$, если α предельный ненулевой ординал, то $\beth_\alpha$ является верхней гранью (в качестве ординала или кардинала это одно и то же) кардиналов $\beth_\beta$, для $\beta < \alpha$. Обобщенная континуум-гипотеза утверждает что $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$ для каждого α . Если, напротив она неверна, то последовательность $\beth$-ов прыгает через некоторые кардиналы.

Теорема 8.9 *Если A бесконечное множество, то $A \times A$ и A имеют один и тот же кардинал.*

Доказательство. Пусть κ кардинал A , определим на множестве $\kappa \times \kappa$ порядок $\leq'$ следующим образом (не забываем, что элементами κ являются ординалы с естественным порядком) :

$(\alpha, \beta) <' (\alpha_1, \beta_1)$, если $\max(\alpha, \beta) < \max(\alpha_1, \beta_1)$,

или, если $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha_1, \beta_1)$ и $\alpha < \alpha_1$,

или, если $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha_1, \beta_1)$ и $\alpha = \alpha_1$ и $\beta < \beta_1$.

Оставляем читателю проверку того, что это линейный порядок. Покажем что это полный порядок. Пусть A не пустое подмножество $\kappa \times \kappa$ и B множество элементов (α, β) из A таких, что $\max(\alpha, \beta)$ минимален (в ординале κ). Пусть теперь C множество элементов B таких, что α минимален. Наконец, пусть a элемент C с минимальным β . Тогда a наименьший элемент A относительно порядка $\leq'$.

Мы собираемся теперь рассуждать индукцией по κ , или что то же самое, индукцией по его индексу α в качестве $\aleph_\alpha$. Отметим сначала что $\kappa < card(\kappa \times \kappa)$. Действительно, отображение которое α отображает в $(\alpha, 0)$ является инъекцией κ в $\kappa \times \kappa$.

Если $\kappa = \aleph_0$ и $(\alpha, \beta) \in \omega \times \omega$, то те (α_1, β_1) , которые меньше в (α, β) относительно порядка $\leq'$, мажорируются $\max(\alpha, \beta)$, являющимся конечным числом. Их, таким образом, также конечное число. Тогда порядок $\leq'$ является полным бесконечным порядком, каждый собственный начальный сегмент которого конечен: его ординал , таким образом, ω . Мы получаем, таким образом, биекцию между ω и $\omega \times \omega$, немного другую, но также примитивно рекурсивную, чем та которую мы использовали в арифметике в лемме 7.16 : здесь мы нумеруем элементы пакетами $\max(x, y) = m$, вместо $x + y = m$.

В других случаях, если $(\alpha_1, \beta_1) \leq' (\alpha, \beta 1)$, то α_1 и β_1) мажорируются $\max(\alpha, \beta)$, являющимся ординалом строго меньшим κ . Обозначим его кардинал через λ , таким образом, λ строго меньше κ , и ординал (α, β) , таким

[3] алеф $\aleph$ – первая буква древнееврейского алфавита

[4] бет $\beth$ – вторая буква древнееврейского алфавита

образом, мажорируется $\lambda \times \lambda$, который по гипотезе индукции, равен λ . Таким образом, ординал полного порядка $\leq'$ имеет кардинал по крайней мере κ , а все его собственные начальные сегменты являются кардиналами строго меньшими κ . Тогда он может быть только ординалом κ . Таким образом мы установили биекцию между κ и $\kappa \times \kappa$.

□

Доказательство последней теоремы может казаться на первый взгляд немного сложным: в нем именно аксиома выбора, позволяющая вполне упорядочить A , является существенным аргументом.

Мы видим, как следствие этой теоремы, что "арифметика бесконечных кардиналов" особенно проста. Если κ и λ кардиналы, то называем $\kappa+\lambda$ (внимание: это не является суммой ординалов) кардинал $A \cup B$, где кардинал A равен κ , а кардинал B равен λ и A с B дизъюнктны. Если κ и λ конечны, то это будет их обычная сумма в качестве натуральных чисел. Если один из них бесконечен, то $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Действительно, если например $\kappa = \max(\kappa, \lambda)$, то

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa \leq 2\kappa \leq \kappa \times \kappa = \kappa \ .$$

Подобным образом, произведением двух кардиналов κ и λ называется кардинал декартова произведения $A \times B$, где кардинал A равен κ , а кардинал B равен λ (внимание: это не является лексикографическим произведением ординалов). Если κ и λ конечны, то это будет их обычное произведение в качестве натуральных чисел. Если же один из них бесконечен, а другой не нуль, то $\kappa \times \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Действительно, если например $\kappa = \max(\kappa, \lambda)$, то

$$\kappa \leq \kappa \times 1 \leq \kappa \times \lambda \leq \kappa \times \kappa = \kappa \ .$$

Обозначим через κ^λ кардинал множества A^B всех отображений из B в A , где кардинал A равен κ , а кардинал B равен λ . Если B и С дизъюнктны, то отображение $B \cup C$ в A определено своими ограничениями на B и на C , которые можно выбирать совершенно независимо, так что $A^{B \cup C}$ находится в биекции с $A^B \times A^C$, и $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \times \kappa^\mu$.

Задавать отображение из C в A^B , которое сопоставляет c функцию f_c , это то же самое, что задавать отображение $B \times C$ в A , которое паре (b, c) сопоставляет $f_c(b)$ и значит $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \times \mu}$. Если κ и λ конечны, то κ^λ показательная функция арифметики.

Предположим теперь, что κ бесконечен, тогда $\kappa^0 = 1$. Если $\lambda = n$ конечно и не нуль, то так как $\kappa^2 = \kappa$ и $\kappa^{m+1} = \kappa^m \times \kappa$, легко показывается индукцией по n , что $\kappa^n = \kappa$. Если λ бесконечен и меньше κ , то можно только указать границы для κ^λ . Отметим сначала, что если κ бесконечен, то $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. Действительно, $2^\kappa \leq \kappa^\kappa$. Кроме того, задавать функцию из κ в κ , это задавать её график, который является подмножеством $\kappa \times \kappa$, значит $\kappa^\kappa \leq 2^{\kappa \times \kappa} = 2^\kappa$. Следовательно, если κ, λ бесконечны и $\lambda \leq \kappa$, то $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq 2^\kappa$. Действительно, $\kappa = \kappa^1 \leq \kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$.

Если κ бесконечен и $\lambda \geq \kappa$, тогда $\kappa^\lambda = 2^\lambda$, так как $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda$. Остается случай когда κ конечен: $0^0 = 1$, и если $\lambda \neq 0$, то $0^\lambda = 0$, $1^\lambda = 1$. Для $n \geq 2$, справедливо тождество $n^\lambda = 2^\lambda$, так как $2^\lambda \leq n^\lambda \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

Обозначим теперь через $\kappa^{<\omega}$ множество конечных последовательностей со значениями в κ , то есть функций, которые для некоторого n отображают $[0,n]$ в κ . Иначе говоря $\kappa^{<\omega} = \cup\kappa^n$. Если κ бесконечно , то $\kappa^{<\omega} = \omega \times \kappa = \kappa$, так как $\kappa^n = \kappa$ для любого n . Таким образом, если κ бесконечен, то *множество конечных последовательностей со значениями в κ имеет кардинал κ* . Точно такой же кардинал имеет и множество конечных подмножеств κ , являющимися образами этих последовательностей.

Все это позволяет полностью оправдать оценки кардиналов, которые нам служили для того, чтобы доказать теорему Левенгейма-Сколема: если язык включает только конечное или счетное число реляционных, функциональных или константных символов, то существует только счетное число слов в этом языке, т.е. произвольных конечных последовательностей символов языка, так как их число равно $\omega^{<\omega} = \omega$. Значит существует не более ω формул, и их число с другой стороны по крайней мере равно ω , например, имеется счетное число формул вида $x_i = x_i$. Таким образом $|T| = \omega$. Аналогично, если число символов языка равно κ , то $|T| = \kappa^{<\omega} = \kappa$.

В теореме Левенгейма (2.5, 3.1), мы должны были оценивать число формул с параметрами из множества A кардинала κ : это сводится подсчету формул языка $L(A)$,полученного добавлением имени для каждого элемента A . Таким образом $|T(A)| = (|L| + |A|)^{<\omega} = \max(|T|, |A|)$. Успокоив читателя в пригодности прошлых теорем, я добавлю, предвидя будущее, две комбинаторные теоремы.

Теорема 8.10 *Для каждого бесконечного кардинала κ , существует цепь кардинала κ , имеющая по крайней мере κ^+ сечений (или, эквивалентно, существует цепь кардинала κ^+ , имеющий плотную подцепь кардинала κ).*

Доказательство. Пусть λ наименьший кардинал такой, как $\kappa^\lambda > \kappa$; так как $\kappa^\kappa = 2^\kappa$, то $\lambda \leq \kappa$. Полагаем, что A есть множество κ^λ отображений из λ в κ , кардинал которого по крайней мере κ^+ , который мы снабжаем следующим ниже отношением порядка, называемым "лексикографическим порядком". Если f и g два различных элемента A , то существует наименьший ординал α в λ такой, что $f(\alpha) \neq g(\alpha)$. Если для этого α $f(\alpha) < g(\alpha)$ (в упорядочении ординала κ), то полагаем $f < g$. Если же, напротив $g(\alpha) < f(\alpha)$, то полагаем $g < f$.

Нетрудно видеть, что речь идет о линейном порядке, и что множество B отображений λ в κ , принимающих постоянное значение 0 начиная с некоторого места, образует в нем плотную подцепь. Для каждого α из λ , обозначим через B_α множество элементов A , принимающих постоянное значение 0 для каждого $\beta \geq \alpha$. Их число совпадает с числом отображений из множества $[0, \alpha]$ в κ . Так как ординал α строго меньше λ , то его кардинал также строго меньше λ , и по определению λ $|B_\alpha| \leq \kappa$ (и в действительности $|B_\alpha| = \kappa$ за исключением случая $\alpha = 0$) . Так как $B = \cup_{\alpha<\lambda} B_\alpha$, то его кардинал равен $\lambda \times \kappa \leq \kappa \times \kappa = \kappa$.

□

Для данного бесконечного кардинала κ , назовем $Ded(\kappa)$ наименьший кардинал λ такой, что никакая цепь кардинала κ не могла иметь λ различных сечений (символ Ded - от фамилии Дедекинд). Если $Ded(\kappa)$ является кардиналом-последователем, то мы обозначим через $ded(\kappa)$ его предшественника: $ded(\kappa)$

является таким образом максимальным числом сечений, которые может иметь цепь кардинала κ . Для некоторых κ , ded может не существовать.

Так как сечение в A определено подмножеством в A являющимся его меньшим классом, то $Ded(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$, и если $ded(\kappa)$ существует, то $ded(\kappa) \leq 2^\kappa$. Таким образом, с помощью теоремы 8.10, мы получаем оценки

$$(\kappa^+)^+ \leq Ded(\kappa) \leq (2^\kappa)^+, \quad \kappa^+ \leq ded(\kappa) \leq 2^\kappa .$$

Для $\kappa = \omega$, $ded(\kappa)$ существует, и равен 2^ω , так как цепь рациональных чисел имеет 2^ω сечений. И естественно, если допускать обобщенную континуум-гипотезу, то $ded(\kappa)$ существует всегда и равен 2^κ . Но поведение функции Ded , в отсутствии этой гипотезы, является предметом заботы специалистов теории множеств.

Теорема 8.11 (Хаусдорф) *Если A является бесконечным множеством кардинала κ , то имеются $2^{(2^\kappa)}$ различных ультрафильтров из подмножеств A .*

Доказательство. Так как ультрафильтр на A является множеством подмножеств A, то их не более чем $2^{(2^\kappa)}$. Нам нужно показать, что их по крайней мере столько же. Говорим, что семейство F подмножеств A *булево независимо*, если оно составляет базу свободной алгебры Буля. Это означает, что если $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ являются различными элементами F , то пересечение всех X_i и всех дополнений Y_j в A никогда не пусто.

Если F является булево независимым семейством, то каждому подмножеству G в F соответствует база фильтра, образованная из элементов G и дополнений элементов из F , которые не лежат в G . Эта база фильтра продолжается до ультрафильтра U_G . Если $G \neq G'$, тогда обязательно $U_G \neq U_{G'}$, действительно, если например $X \in G,\ X \notin G'$, тогда X в U_G в то время как именно дополнение к X лежит в $U_{G'}$. Следовательно, нам достаточно доказать, что существует булево независимое семейство из 2^κ подмножеств A .

Рассмотрим наше множество A кардинала κ и множество B , дизъюнктное с A , образованное из элементов $b(F; P_1, \ldots, P_n)$, индексированных, с одной стороны, конечным подмножеством F из A и с другой стороны, (конечным!) множеством $P_1, \ldots, P_n$ подмножеств F . Так как имеется только κ конечных подмножеств A , и каждое из них имеет лишь конечное число подмножеств, то B также имеет кардинал κ .

Каждое подмножество X в A мы отображаем инъективно на подмножество X' в $A \cup B$, определенное таким образом:

– если a в A , то $a \in X' \iff a \in X$

– если b в B, $\quad b = b(F; P_1, \ldots, P_n)$, то $b \in X' \iff X \cap F$ одно из P_i .

Я утверждаю, что семейство X свободно. Действительно рассмотрим различные подмножества $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ из A . Если два множества отличаются, это значит, что некоторая точка принадлежит одному, но не другому. Таким образом, существует конечное подмножество F в A такое, что следы $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ этих множеств на F попарно различны и элемент $b(F; P_1, \ldots, P_n)$ принадлежит X'_i , но не принадлежит Y'_i . Таким образом мы построили семейство из 2^κ независимых подмножеств $A \cup B$. Так как это последнее множество имеет кардинал κ , то нам остается только его перевести биекцией на A , чтобы получить требуемое семейство.

8.d Конфинальность

Конфинальное подмножество B цепи A , это просто её не ограниченное подмножество : для каждого a из A , существует элемент b из B , больший или равный a . Цепь B называется *конфинальной* к цепи A , если она изоморфна подцепи конфинальной с A . Это понятие ,очевидно, транзитивно: если A конфинальна к B и B конфинальна к C , тогда A конфинальна к C .

Теорема 8.12 *Каждая цепь имеет конфинальное вполне упорядоченное (ограничением порядка на цепи!) подмножество.*

Доказательство. Пусть A цепь, тогда индукцией по α мы определяем следующим образом возрастающую последовательность элементов A : если цепь $\{\ldots, a_\beta, \ldots\}_{\beta<\alpha}$ не ограничена, то останавливаемся, a_α не определяется; иначе a_α является точной мажорантой a_β , для $\beta < \alpha$. Когда процесс закончится, построим подцепь, вполне упорядоченную и не ограниченную в A .

□

Таким образом, *конфинальностью* A называется (другие говорят: *финальный характер* A) наименьший ординал, обозначаемый $cof(A)$, конфинальный в A . По транзитивности, ординал $\alpha < cof(A)$ не может быть конфинальным в $cof(A)$, и $cof(A)$ равен своей собственной конфинальности: ординал, обладающий этим свойством называется, *регулярным.*

Лемма 8.13 *Каждый регулярный ординал является кардиналом.*

Доказательство. Достаточно доказать, что каждый полный порядок A обладает финальным подмножеством, чей ординал меньше или равен $card(A) = \kappa$. Для этого индексируем A ординалами из κ , находящегося в биекции с A . Элементы A , таким образом, имеют вид $a_\alpha : \alpha \in \kappa$. Мы располагаем двумя полными порядками на A : порядок элементов A и порядок индексов. Повторим теперь доказательство предыдущей леммы, строя последовательность b_α индукцией по α :

– если последовательность $\{b_\beta\}_{\beta<\alpha}$, не ограничена в A , то останавливаемся и элемент b_α не определяется ,

– иначе, в качестве b_α берем элемент a_γ с минимальным индексом γ , который больше всех b_β, $\beta < \alpha$ и больше или равен a_α .

Если остановимся до κ , то получим конфинальное подмножество ординала $\alpha < \kappa$; а иначе получим конфинальное подмножество ординала κ .

□

Отличают таким образом два рода кардиналов: *регулярные кардиналы*, и другие, которые называются *сингулярными кардиналами.* Например, конечными регулярными кардиналами являются 0 (пустой конфинальности) и 1 , конфинальная цепь которого имеет наибольший элемент; ординал ω регулярен.

Теорема 8.14 *Кардинал* $\kappa \neq 2$ *сингулярен если и только, если существует семейство содержащее меньше чем* κ *множеств, кардинал каждого из которых меньше чем* κ *, и объединение семейства имеет кардинал* κ *.*

Доказательство. Если κ сингулярен, то он имеет конфинальное подмножество A имеющее меньший кардинал. Для каждого α из κ , обозначим через $I_\alpha = \{\beta : \beta \leq \alpha\}$ (в действительности, $I_\alpha = \alpha + 1$!) . По определению I_α является собственным начальным сегментом κ , кардинал которого меньше κ , за исключением случая когда κ конечен и α является его наибольший элементом. Если κ равен 0 или 1 , то он регулярен, и критерий проверен. Если $\kappa = n$ конечен и больше 2 , то $n = (n-1)+1$. Если κ бесконечен, то $\kappa = \cup_{\alpha \in A} I_\alpha$.

Предположим теперь, что $A = \cup_{i \in I} A_i$ и $\kappa = |A|$, $|A_i| < \kappa$, $|I| < \kappa$ так, что кардинал λ множества I минимальный с таким свойством: A не может быть выражено как объединение менее, чем λ своих подмножеств имеющих кардинал меньший чем κ . Отобразим полный порядок λ на I . Это позволяет индексировать множества A_i через λ . Можно предполагать, что множества A_α дизъюнктны. В противном случае, заменим каждое множество A_α на $A_\alpha - \cup_{\beta<\alpha} A_\beta$. Мы снабжаем каждое множество A_α полным порядком, например, порядком его кардинала.

Рассмотрим на A "суммарный" полный порядок порядков на $\cup A_\alpha$. Считаем а $< b$, если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, где $\alpha < \beta$ или, если $a, b \in A_\alpha$ и $a < b$ в смысле A_α . Если кардинал λ конечен, то значит множество A конечно и его кардинал больше или равен 2 (в действительности, $\lambda = 2$). Если λ бесконечен, то он является предельным ординалом, и так как он минимален с обсуждаемым свойством, то каждый собственный начальный сегмент суммарного полного порядка множеств A_α имеет кардинал меньший κ . Таким образом порядок на $\cup A_\alpha$ является обязательно полным порядком κ . Тогда последовательность элементов минимальных в каждом A_α , ординал которой равен λ , конфинальна в κ .

□

Доказательство предыдущей теоремы показывает что действительно, для каждого бесконечного кардинала κ , $cof(\kappa) = \lambda$ является наименьшим кардиналом таким, что можно κ выразить как сумма λ кардиналов, каждый из которых меньше κ . Характеристика регулярных кардиналов является следующей : пусть A_α возрастающая последовательность множеств, индексированных κ . Таким образом, если $\alpha < \beta$, то $A_\alpha \subseteq A_\beta$. Тогда каждое подмножество $\cup_{\alpha<\kappa} A_\alpha$, имеющее кардинал меньший κ , содержится в одном из A_α .

Мы, например, очень часто использовали регулярность ω в следующей форме : если для каждого n верно $A_n \subseteq A_{n+1}$, то каждое конечное подмножество $\cup A_n$ содержится в одной из A_n . В большей общности, если A_α возрастающая последовательность, множеств индексированная ординалом β , то каждое подмножество B в $\cup_{\alpha<\beta} A_\alpha$, имеющее кардинал меньший $cof(\beta)$ содержится в одной из A_α . Если бы это не имело место, то множество таких α , что A_α содержит элемент из B , не лежащий в множествах с меньшим индексом (это множество индексов имеет кардинал не больше кардинала β) будет конфинально в β .

Каждый бесконечный кардинал-последователь регулярен. Если $\kappa = \lambda^+$, то объединение семейства из λ множеств кардинала λ имеет кардинал $\lambda \times \lambda = \lambda$. Если κ бесконечный регулярный кардинал, не являющийся последователем, отличный $\aleph_0$, то необходимо, чтобы $\kappa = \aleph_\kappa$. Действительно, если ординал α ненулевой и предельный, то последовательность $\aleph_\beta : \beta < \alpha$, конфинальна в $\aleph_\alpha$. Если мы допускаем обобщенную континуум гипотезу, то $2^\kappa = \kappa^+$, и 2^κ всегда регулярен. Без этой гипотезы это вообще говоря не верно, но мы собираемся показать, что конфинальность 2^κ строго выше κ .

Теорема 8.15 *[Юлиус Кёниг [5]]. Пусть A_i и B_i два семейства множеств, каждое индексированное одним и тем же множеством I , такие, что для каждого i кардинал A_i меньше кардинала B_i . Тогда кардинал объединения A_i меньше кардинала произведения B_i .*

Доказательство. Эта теорема эквивалентна аксиоме выбора: при $A_i \neq \emptyset$ видим, что утверждается непустота произведения непустых множеств. И мы доказываем теорему, конечно, используя аксиому выбора. Можно, очевидно, предполагать, что множества A_i дизъюнктны. Так как существует инъекция A_i в B_i , то можно также предполагать, что $A_i \subset B_i$. Покажем сначала, что $|\cup A_i| \leq \prod |B_i|$. Для этого, выберем в каждом B_i элемент b_i , не лежащий в A_i . Определим инъекцию $\cup A_i$ в B_i следующим образом: элемент a из A_i отобразим на I-кортеж с i-ой координатой a , а с j-ой координатой b_j , для $j \neq i$.

Покажем теперь, что нет сюръекции s множества $\cup A_i$ на $\prod B_i$. Предположим, что s отображение $\cup A_i$ в $\prod B_i$ и пусть C_i подмножество B_i , образованное из i-ых проекций элементов $s(A_i)$. Так как $|C_i| \leq |A_i| < |B_i|$, то найдется элемент b_i из B_i , не лежащий в C_i . Тогда кортеж $(\ldots, b_i, \ldots)$ не лежит в образе s .

$\square$

Следствие 8.16 *Для всех бесконечных кардиналов κ имеем $\kappa < \kappa^c of(\kappa)$.*

Доказательство. Мы можем выразить κ как объединение множеств A_α : $\alpha < cof(\kappa), |A_\alpha| < \kappa$. Полагая $B_\alpha = \kappa$ видим, что кардинал суммы A_α , равный κ , меньше кардинала произведения B_α , равного $\kappa^{cof(\kappa)}$.

$\square$

Так как $(2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\times\kappa} = 2^\kappa$, то конфинальность 2^κ обязательно выше κ . Например, конфинальность 2^ω выше ω . Кардинал 2^ω не может равняться $\aleph_\omega$, но, за этим исключением, в теории множеств умеют доказывать, что 2^ω может находиться почти где угодно в иерархии алефов.

Упражнение 8.17 *При предположении обобщенной континуум гипотезы докажите, что если κ бесконечный кардинал, и если λ и μ кардиналы меньшие κ , тогда $\lambda^\mu \leq \kappa$. Выведите из этого, что $\kappa^\lambda > \kappa$ если и только, если $\lambda \geq cof(\kappa)$.*

[5] отец автора теоремы 7.26 о деревьях

8.e Исторические и библиографические примечания

Из-за утилитарного характера этой главы, бесполезно давать ссылки по поводу результатов. Всё, что здесь упоминается, очень классическое. Это было бы работой, не имеющей связи с тем, что я предпринял здесь, так как представить эволюцию "Теории множеств" в течение конца прошлого века, это, в действительности, описывать появление современной концепции математики. Для всего этого, я хотел бы ограничиться ссылкой на [МУР, 1982] . Я делаю тем не менее одно исключение в пользу [ЙЕХ, 1977] , чтение которого рекомендую для тех, кто хочет подробнее разобраться с аксиомой выбора.