

Бруно Пуаза

# КУРС ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

*Перевод с французского  
Е.Р. Байсалова и  
К.А. Мейрембекова*

Bruno Poizat

**COURS DE  
THÉORIE DES MODÈLES**

Une introduction à la Logique  
Mathématique contemporaine

نور المنطق والمعرفة

NUR AL-MANTIQ WAL-MA'RIFAH

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>viii</b>
<b>1 Элементарные классы отношений</b>	<b>1</b>
1.a Локальные изоморфизмы между отношениями . . . . .	2
1.b Примеры . . . . .	5
1.c Бесконечный ”челночный” метод . . . . .	11
1.d Исторические и библиографические примечания . . . . .	14
<b>2 Язык одного отношения</b>	<b>15</b>
2.a Формулы . . . . .	16
2.b Связи с ”челноком” . . . . .	24
2.c Модели и теории . . . . .	25
2.d Элементарные расширения : тест Тарского, теорема Левенгейма . . . . .	27
2.e Исторические и библиографические примечания . . . . .	29
<b>3 Расширение языка, структуры</b>	<b>31</b>
3.a Мультиотношения, реляционные структуры . . . . .	32
3.b Функции . . . . .	33
3.c Снова о теореме Левенгейма . . . . .	36
3.d Исторические и библиографические примечания . . . . .	37
<b>4 Компактность</b>	<b>38</b>
4.a Ультрапроизведения . . . . .	39
4.b Компактность, теорема Левенгейма-Сколема, теорема об общем элементарном расширении . . . . .	43
4.c Метод Генкина . . . . .	48
4.d Исторические и библиографические примечания . . . . .	53

<b>5</b>	<b>Челночный метод в <math>\omega</math>-насыщенных моделях</b>	<b>55</b>
5.a	Пространство типов . . . . .	56
5.b	$\omega$ -насыщенные модели . . . . .	57
5.c	Элиминация кванторов . . . . .	60
5.d	Исторические и библиографические примечания . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Иллюстрации челночного метода</b>	<b>65</b>
6.a	Алгебраически замкнутые поля . . . . .	66
6.b	Дифференциально замкнутые поля . . . . .	72
6.c	Булевы алгебры . . . . .	80
6.d	Ультраметрические пространства . . . . .	87
6.e	Модули, экзистенциально замкнутые модули . . . . .	92
6.f	Исторические и библиографические примечания . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Арифметика</b>	<b>103</b>
7.a	Функция следования . . . . .	104
7.b	Порядок . . . . .	105
7.c	Сумма . . . . .	106
7.d	Сумма и произведение : кодирование конечных множеств . . . . .	111
7.e	Кодирование формул, теорема Тарского . . . . .	117
7.f	Иерархия арифметических множеств . . . . .	119
7.g	Некоторые аксиомы, модели фрагментов арифметики . . . . .	129
7.h	Нестандартные модели в арифметическом определении . . . . .	135
7.i	Арифметический перевод метода Генкина . . . . .	136
7.j	Понятие доказательства, разрешимые теории . . . . .	140
7.k	Теорема Геделя . . . . .	145
7.l	Немного математической фикции . . . . .	148
7.m	Исторические и библиографические примечания . . . . .	152
<b>8</b>	<b>Ординалы и кардиналы</b>	<b>154</b>
8.a	Вполне упорядоченные множества . . . . .	155
8.b	Аксиома выбора . . . . .	159
8.c	Кардиналы . . . . .	166
8.d	Конфинальность . . . . .	172

8.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	175
<b>9</b>	<b>Насыщенные модели</b>	<b>176</b>
9.a	Теорема Свенониуса . . . . .	178
9.b	Компактные, насыщенные, однородные, универсальные модели . . . . .	180
9.c	Блестящие модели . . . . .	185
9.d	Свойства сохраняющиеся при интерпретациях . . . . .	190
9.e	Рекурсивно насыщенные модели . . . . .	191
9.f	Исторические и библиографические примечания . . . . .	197
<b>10</b>	<b>Простые модели</b>	<b>198</b>
10.a	Теорема об опускании типов . . . . .	199
10.b	Простые модели, атомные модели: счетный случай . . . . .	201
10.c	Теории с конечным числом счетных моделей . . . . .	204
10.d	Конструируемые модели . . . . .	205
10.e	Минимальные модели . . . . .	209
10.f	Неединственность простой модели . . . . .	211
10.g	Исторические и библиографические примечания . . . . .	217
<b>11</b>	<b>Наследники</b>	<b>218</b>
11.a	Наследники . . . . .	219
11.b	Определимые типы . . . . .	223
11.c	Типы конечных расширений в арифметике . . . . .	224
11.d	Стабильные типы и теории . . . . .	226
11.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	230
<b>12</b>	<b>Особые сыновья, последовательности Морли</b>	<b>232</b>
12.a	Особые сыновья . . . . .	233
12.b	Конаследники . . . . .	236
12.c	Последовательности Морли . . . . .	239
12.d	Свойство независимости . . . . .	243
12.e	Неделимые последовательности Морли . . . . .	248
12.f	Один пример : теории порядков . . . . .	256
12.g	Особые последовательности . . . . .	262
12.h	Нестабильность и порядок . . . . .	264
12.i	Добавление: теорема Рамсея . . . . .	267
12.j	Исторические и библиографические примечания . . . . .	269

<b>13</b>	<b>Фундаментальный порядок</b>	<b>272</b>
13.a	Фундаментальный порядок . . . . .	273
13.b	Спектр стабильности . . . . .	277
13.c	Некоторые примеры . . . . .	281
13.d	Исторические и библиографические примечания . . . . .	284
<b>14</b>	<b>Стабильность и насыщенные модели</b>	<b>286</b>
14.a	Теорема существования . . . . .	287
14.b	Теоремы несуществования . . . . .	288
14.c	Блестящие модели . . . . .	290
14.d	Достаточно насыщенные расширения данной модели . . . . .	292
14.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	294
<b>15</b>	<b>Отклонение</b>	<b>296</b>
15.a	Теорема о грани . . . . .	297
15.b	Сыновья с отклонением, сыновья без отклонения . . . . .	300
15.c	Кратность . . . . .	303
15.d	Стабильные типы в нестабильной теории . . . . .	305
15.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	306
<b>16</b>	<b>Сильные типы</b>	<b>307</b>
16.a	Теорема о конечной эквивалентности . . . . .	308
16.b	Пространства сильных типов; теорема об открытом отображении . . . . .	311
16.c	Последовательность Морли сильного типа; снова о насыщенных моделях . . . . .	313
16.d	Воображаемые элементы . . . . .	317
16.e	Элиминация воображаемых элементов . . . . .	319
16.f	Теория Галуа для сильных типов . . . . .	327
16.g	Исторические и библиографические примечания . . . . .	330
<b>17</b>	<b>Понятия ранга</b>	<b>331</b>
17.a	Ранг Ласкара . . . . .	332
17.b	Ранг Шелаха . . . . .	335
17.c	Ранг Морли . . . . .	340
17.d	Локальные ранги . . . . .	344
17.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	349
<b>18</b>	<b>Стабильность и простые модели</b>	<b>350</b>

18.a	Теорема единственности . . . . .	351
18.b	Простые модели totally трансцендентной теории . . . . .	352
18.c	Теория Галуа дифференциальных уравнений . . . . .	357
18.d	Простые $ T ^+$ -насыщенные модели . . . . .	364
18.e	Модели Эрэнфойхта . . . . .	367
18.f	Теорема о двух кардиналах ; $\omega_1$ -категоричные теории . . . . .	369
18.g	Исторические и библиографические примечания . . . . .	372
<b>19</b>	<b>Стабильность, неразличимые последовательности и вес</b>	<b>373</b>
19.a	Неразличимые последовательности . . . . .	374
19.b	Неравенства Ласкара . . . . .	376
19.c	Вес суперстабильного типа . . . . .	380
19.d	Независимость и поглощение . . . . .	384
19.e	Исторические и библиографические примечания . . . . .	393
<b>20</b>	<b>Размерность в моделях totally трансцендентной теории</b>	<b>394</b>
20.a	Порядок Рудин–Кейслера . . . . .	395
20.b	Типы и размерностные теории . . . . .	403
20.c	Классификация моделей размерностной теории . . . . .	410
20.d	DOP . . . . .	416
20.e	Глубина и основной скачок . . . . .	418
20.f	Исторические и библиографические примечания . . . . .	419
	<b>Библиография</b> . . . . .	<b>421</b>
	<b>Список обозначений</b> . . . . .	<b>436</b>
	<b>Алфавитный указатель</b> . . . . .	<b>439</b>
	<b>История публикации</b> . . . . .	<b>454</b>
	<b>Индекс цитат</b> . . . . .	<b>456</b>