Введение

Авторы книг в блестящих суперобложках обычно уверяют читателя, что их труд будет интересен и полезен любому и каждому, а не только тем, кто интересуется предметом... Их американские улыбки и безупречные галстуки подкреплены, как водится, солидными именами престижных университетов. Надо бы и мне убедить вас в небесполезности моей книги, и начну я с уточнения - она адресована математикам. А именно тем из моих коллег, кто ощутив однажды доброжелательное, порой снисходительное, но искреннее любопытство к математической логике, не получил дальнейшего стимула, обратившись к существующей литературе. Мне бы хотелось, чтобы мои собратья с первых же страниц встретились со своим любимым делом - доказательством теорем. Поэтому я постарался избежать длинных подходов и громоздких определений, необходимость в которых возникнет значительно позднее, а также - сбивающих неискушенных с толку последовательностей лемм, малосодержательных математически. Порой раздражают и более серьезные теоремы, когда вдруг понимаешь, что ломал над ними голову лишь затем, чтобы прояснить некие банальности.

Я старался вводить определения объектов одновременно с полученными по их поводу результатами для того, чтобы побыстрее перейти к предложениям, которые требовательный читатель признает как теорему. Например, теорему 1.14, доказываемую на нескольких страницах и утверждающую, что две счетные ∞-эквивалетные структуры являются изоморфными. Я пытался по мере возможности иллюстрировать методы теории моделей примерами, использующими общепринятые математические понятия (алгебраически замкнутые поля и т.п.), которые составляют привычный мир современного математика и которые мотивируют убедительней, чем тривиальные примеры, очень часто присутствующие во вводных книжках по логике ('тривиальный' здесь употреблено в математическом смысле, что впрочем, не противоречит и этимологии).

Работая над этим курсом, я думал и о другой категории математиков - математиках начинающих, студентах наших университетов, у которых несомненно есть будущее, но кто пока не нашел своего места под солнцем науки. Возможно, некоторые места в моей работе они найдут сложноватыми.

Но это не повод для тревоги за свой интеллект, они столкнулись с обычными трудностями , которые испытывает каждый, даже вполне опытный математик при первом знакомстве с новой областью. Холодная невозмутимость, которую выражают лица ваших старших коллег, когда они слушают доклады на научных конференциях - результат многолетнего опыта участия в таких мероприятиях , а вовсе не признак превосходной быстроты мышления или совершенного понимания материала, который излагает докладчик.

Впрочем эта книга и адресована студентам, поскольку речь идет о курсе, который был в самом деле прочитан по частям и несколько раз на уровне DEA [1]. Однако не думаю, что этот курс может быть полезен тем, кто не имеет пока никакой математической культуры., если только он не является патологически одаренным - читатель должен иметь уровень бакалавра или магистра по математике. Необходимо в сущности определенное знакомство с обычными условностями, методами доказательств, принятыми в современной математике, которые. как и везде, применяются в этом курсе, а также с примерами, которые их иллюстрируют, нужно также иметь достаточное представление о компактных пространствах.

Мне до сих пор помнится, как на одной из своих лекций я произнес, стоя лицом к доске - "Возьмем поясняющий пример, пусть K- алгебраически замкнутое поле..." и повернувшись, по лицам студентов понял, что свет, излучаемый этим примером, мог бы в самом деле кое-что прояснить, если бы они знали, о чем идет речь... Так что если начинающий читатель запутается в примерах, предназначенных для того, чтобы ему помочь, он может их пропустить или обратиться к доступному учебнику по алгебре или топологии, а то и обратиться за помошью к более опытному товарищу.

Наконец я думал о третьей категории читателей - математиках-специалистах. Ведь им приходится преподавать этот предмет и они могут предложить мою книгу, если найдут ее приемлемой, своим студентам в качестве путеводителя, если они читают курс по этой теме, или в качестве ссылки. если читаемый курс выше этого уровня. А также (конечно, тут я проявляю большую самонадеянность) я верю, что моя книга сможет сказать нечто новое даже профессиональным логикам: ее вторая часть, состоящая из глав с 11 по 20, трактует то, что теперь называется "теорией стабильности": именно ее специалисты рассматривают

[1] Diplome d'Etudes Approfondies, соответствует нашему диплому магистра

как сердцевину теории моделей. И именно у нее есть наибольший шанс выйти за тесноватые рамки математической логики. Но эта дисциплина существует лишь десять лет, не так широко известна, и многие считают по разным причинам ее очень сложной: не было доступной книги, излагающей эту теорию достаточно глубоко. Публикаций этого курса мне хотелось бы восполнить этот пробел.

Профессиональные логики также приглашаются к внимательному изучению первых глав, поскольку я намеренно выбрал неординарный подход к основам логики. Понятие, которое я выбрал исходным, есть понятие "челнока" в стиле Фраиссе, а не понятие выполнимости формулы. Я сделал это, чтобы не повторять лишний раз то, что можно найти на первых страницах существующих учебников (нередко, к сожалению, не только на первых страницах; я часто буду упрекать своих предшественников за нудное введение в предмет), а также потому, что я нахожу этот подход удовлетворительным для математика, позже я дам объяснения этому. Мой читатель-логик не узнает, таким образом, ничего нового из глав 1-10, составляющих то, что можно назвать "классической" теорией моделей, если он уже обратился в религию Фраиссе. Его наверняка удивит это изложение теории моделей под особым освещением и с другими приоритетами, но сравнивать и оценивать различные подходы к любимому предмету полезно. И это несомненно полезно преподавателю, потому что дает возможность размышлять над природой объектов, которые ему хорошо знакомы, и которые, возможно. приобретут под другим углом зрения новые черты.

Впрочем. чтение этой книги трудно будет начинать с 11 главы, поскольку я попытался придерживаться единого дидактического замысла, который разворачивается последовательно раскрывая несколько направляющих идей. Кстати, в шикарных изданиях, о которых я упомянул вначале, принято изображать между предисловием и содержанием некий граф, по возможности не планарный, указывающий порядок. которого можно или даже нужно придерживаться, читая различные главы. Я воздержался от изображения подобного графа, который был бы здесь прискорбно линейным, поскольку главы этой книги написаны, чтобы читать их в их естественном порядке следования; впрочем, это не такое уж странное качество для книги.

И вот я добрался до содержания. Как вы уже поняли, речь идет о введении в некий предмет. Что это за предмет? Вы отметите, что его название - "Курс теории моделей", а не "курс математической логики"; однако, по-моему, его первые главы могут быть прочитаны всяким, кто хотел бы приобщиться к какой бы то ни было области математической логики. Потому что теория моделей в логике имеет почти тот же статус, что и арифметика в математике: теория чисел является престижной и очень специализированной ветвью современной математики. Хотя не бывает математики без чисел, однако математик, который может без ошибки досчитать до ста и даже далее. не может тем не менее рассматриваться как специалист по теории чисел. Можно сказать, что основы теории моделей (здесь главы с 1 по 10) относятся к сегодняшней логике как как арифметика к математике; далее (главы с 11 по 20) теория моделей обособляется, как и теория чисел. Теория моделей является, таким образом, самой "нелогической", нетипичной ветвью математической логики. В то же время ни один логик не может проигнорировать ее фундаментальные движущие силы. Не стоит однако из этого делать вывод, что все логики одинаково хорошо знакомы с понятиями, изучаемыми в первых десяти главах этой книги. не все считают их одинаково фундаментальными; можно быть более или менее либеральным относительно того, какое понятие считать "основным": некоторые включают теорему о распределении простых чисел в элементарную арифметику, другие ее ограничивают простыми свойствами НОД и НОК.

Поскольку мы часто упоминаем о моделях, возможно стоит уточнить, о чем идет речь. В прикладной математике модель есть абстрактное представление некоторой осязаемой действительности. Логики же используют слово "модель" в почти обратном смысле : для них модели являются конкретными объектами (если только математические объекты вообще могут быть таковыми), которые иллюстрируют, интерпретируют некоторые абстрактные идеи; например, вы конечно знаете, как записать аксиомы, выражающие, что некоторый закон бинарной композиции определяет группу; если дано множество аксиом, логик называет его теорией: в данном случае это будет теория групп. модель теории - это структура, которая подтверждает все аксиомы этой теории. Модель теории групп (абстрактное представление) , это значит простонапросто некоторая группа (конкретный объект). Чтобы писать аксиомы, используются формулы, которые являются последовательностями символов, подчиненных определенным правилам построения; все то, что касается манипуляций с формулами, логик называет синтаксисом; понятие модели относится к другой области, поскольку оно предполагает определенную интерпретацию символов, фигурирующих в формулах (например, символ бинарной функции интерпретируется умножением вполне конкретной группы), придающую смысл этим формулам, превращая их в истинные и ложные утверждения: логик скажет, что это - семантическое понятие.

Теория моделей очень мало занимается синтаксисом, сущность этой науки держится на семантическом уровне; с этой точки зрения она есть противоположность тому, что называется теоретической информатикой, существенной компонентой которой является алгоритмическое изучение языков, являющееся главным образом синтаксическим исследованием. Понятно, что естественно приступить к логике через теорию моделей, поскольку обычно в математике дают живому содержанию приоритет над формальными рассуждениями. Однако этот метод познания достаточно нов, поскольку для наших отцов объектом логики было не изучение того, что выполняется на данной структуре, а изучение того, что может быть истинно ("моделью" которого был недостижимый мир нашего разума), а также способа, с помощью которого можно доказать то, что истинно; следовательно, они должны были заботиться о формализации языка, выделив важное место символу импликации, играющему центральную роль в дедуктивных системах; аксиоматизации, формальные правила для проведения доказательств, "эффективный" характер некоторых методов - вот все, что было в центре их внимания. Позже они поняли, что прямая атака на проблему истинности в математике наталкивается на некоторые трудности, и, что лучше поначалу умерить амбиции и начать с попыток классификации, сравнения структур, являющихся моделями одной и той же теории T : это и есть теория моделей. Они заметили также, что эти исследования приводят к интересным и совсем нетривиальным результатам; впрочем, честно говоря, от логики там уже мало что остается - как во многих разделах математики побудительные мотивы потерялись из виду, и новая область начала развиваться автономно. Добавим, что в теории моделей накладываются ограничения на язык (или скорее на его семантику - он должен быть финитарным и первого порядка); это явный признак автономности этой ветви, поскольку нет никаких логических причин предпочтения этого языка другому, а также тщетно пытаться его обосновать, опираясь на более или менее естественную интуицию; если это так, то это в конце концов по техническим причинам, так как рассматриваемый язык единственный или почти единственный, допускающий приличную теорию моделей. Я сказал "или почти" потому, некоторые вот уже несколько лет думают, что все, что можно доказать в "обычной" теории моделей - доказано, и чтобы получить новые теоремы, следует усложнять правила игры, прибегая к разновидностям бесконечных языков, необычных кванторов и т.д.. Это тенденция, против которой я всегда энергично боролся в меру моих слабых возможностей, поскольку верю, что самая обычная теория моделей показала себя источником глубоких результатов, содержательность которых просто потрясает, это направление еще далеко не исчерпано, и бесполезно искусственно его усложнять. Однако что бы там ни было с теперешним положением теории моделей, ее прошлое содержит, к сожалению, много слабых мест на первых страницах традиционных учебников, претендующих на введение в эту теорию посредством рассуждений, не имеющих ничего общего с повседневной практикой теории моделей. Вы найдете там туманные рассуждения, нечеткие определения, неадекватные доказательства, призывы к псевдоестественной интуиции. отравленной метафизическим отбросами, в то время как именно метафизика приводит математика в инстинктивный ужас! А поскольку я писал книгу для математика, то, чтобы убедить его в том, что логика является частью математики, а не метафизики, избрал другой путь. Вот почему в первой главе читателя научат сравнивать две структуры посредством локальных изоморфизмов подобно Роланду Фраиссе. Здесь ничто его не потревожит, все произойдет в знакомой среде, в привычной манере рассуждения. А если скрыть от него название и предисловие этой книги, то он даже не заподозрит, что его стараются затащить в мутные топи проклятой науки. Его подозрения пробудятся во второй и третьей главах, где он поймет связь "челнока" с определенными предложениями подходящего языка, но будет уже слишком поздно отступать, поскольку он почувствует, что эти лингвистические рассмотрения основаны на важном математическом содержании. Конечно, он снисходительно заметит поспешность и неполноту изложения, где его самого иногда просят восполнить пробел. Здесь мы избегаем слишком мелких подробностей, жертвуя полной строгостью доказательств. В одних главах язык, формулы, предложения, одним словом синтаксис, рассматриваются как объект изучения, в других - как иллюстрация, как некоторое внешнее проявление локальных автоморфизмов. Это удобный способ изучения, поскольку он избавляет нас от длинных скрупулезных рассуждений, граничащих с педантизмом без математической сущности, что обычно загромождает первые страницы учебников, для которых синтаксис - каркас всего сооружения. Логик, возможно, удивится : почему это автор так избегает понятия "интуиции"? Я отвечу: это не так уж странно для современного математика. Который имеет обыкновение сначала определять достаточно вычурные объекты (посмотрите, что такое точка или кривая в учебнике по алгебраической геометрии), в которых он после размышления с удовольствием обнаруживает адекватные выражения "интуитивных" или скорее неформальных понятий. Во-вторых, автор не проявил непримиримый фраиссеизм, так как ему не претит говорить о формулах, вернувшись к более традиционному изложению начиная со второй главы. Наконец, наличие более классических учебников, пусть даже заслуживающих критики, по мнению автора, дает ему возможность проявить оригинальность (а она необходима, чтобы заинтересовать профессиональных логиков), поскольку читатель решительно не переносящий локальные изоморфизмы, может изучить логику в другом месте, а не браться за этот курс. В главе 4 вы узнаете, что некоторые пространства являются компактными, и найдете некоторые следствия этой компактности. Что касается главы 5, она подводит итог знаниям, приобретенным ранее. Она убедит вас, что "челночный" метод не является странным и искусственным введением в логику. Напротив, он важный и незаменимый инструмент теории моделей. Эти очень короткие пять глав составляют сами по себе маленький трактат внутри курса, поскольку они уже содержат все существенные понятия теории моделей. Остальное является лишь более или менее утонченным их развитием. В качестве иллюстрации совершенно новой для вас науки и, чтобы нарастить немного плоти на скелет, который вам показали, глава 6 применяет принципы классификации теории моделей к алгебраическим примерам. Иногда они - не самые наглядные и не самые известные. Некоторые из них рассматриваются здесь для того, чтобы получить примеры и контрпримеры для следующих глав. Логика, изгнанная из первых глав, властвует в полной мере в главе 7, посвященной арифметике (так называется теория структуры, образованной натуральными числами со сложением и умножением); это единственная глава книги, дающая сведения о законности доказательств и рассуждений в математике. На первый взгляд кажется, что она немного неуместна в работе по чистой теории моделей. И все-таки эта глава включена в книгу потому, что понятия, приведенные в ней, слишком классические и лежат в основе слишком многих ветвей логики, так что нельзя их совершенно игнорировать. Впрочем, мы увидим, что их можно изучать семантически, т.е. теоретико-модельным способом: здесь арифметика представлена не списком аксиом, а изучением структуры, образованной натуральными числами.

Логика тут проявляется главным образом через определение понятия доказательства, полученного арифметизацией метода Генкина, уже введенного в главе, посвященной компактности. Автор не захотел его представлять неформально без ссылки на арифметическую кодировку, так же как и понятия рекурсивности, разрешимости, рекурсивной аксиоматизации теорий и т.д., вопреки распространенной и докучливой практике; равным образом он восстает против чрезмерного и искусственного смешения рекурсивности и теории моделей. Вершиной главы является, очевидно, знаменитая теорема Геделя, о которой все кое-что слышали, но мало кто знает точную формулировку; так же вы узнаете, какое место в ней занимают кодировки.

Что касается основ математики, то существенный недостаток этого курса - изложение теории множеств. Читатель, возможно надеявшийся на полное освещение этой области в этом курсе логики будет удивлен - с первых строк ему говорят о множествах, об отношениях и даже об ординалах с той же свободой и с той же неточностью, как в обычных математических (я хочу сказать - нелогических) работах. Порой думается - было бы более приемлемым для интеллекта - зафиксировать правила игры, рамки математической, пусть даже и логической деятельности. Затем, как уже стало традицией в последние пятьдесят или даже больше лет, переводить всю математику на язык множеств, начинать все трактаты с изложения теории множеств.

Однако немного поразмыслив, понимаешь, что эта точка зрения иллюзорна, а видимая строгость будет в этом случае несколько обманчивой. Возможно ли заложить начала науки прежде, чем начнешь ею заниматься, как оправдать существование области знания до начала ее исследования? Да и никто в сущности не знает, что такое в точности множества и логики; и наиболее изучавшие их знают об этом еще меньше, чем другие. Подход, о котором говорится выше, в лучшем случае приводит к разработке системы аксиом с целью дать перечень свойств, по поводу которых якобы достигнут консенсус среди математиков. Естественно. что это придает догматический характер некоторым весьма относительным вещам; это также выпячивание кодировки - технического ухищрения во вред понятию, глубокой идее. Вообще говоря логичен совершенно противоположный путь: изучаются обычные математические дисциплины - алгебра, анализ и затем следует спросить себя - в какой множественной теории - аксиоматической или нет - они могут быть определены.

Следовательно в первых главах я безбоязненно обращался к теоретико-множественым понятиям (главным образом индукции по бесконечным ординалам), неизвестных определенному кругу читателей. Надеюсь, что это побудит их попытаться узнать больше. И только теперь, когда нам нужны счетно-бесконечные аргументы и арифметика ординалов, я ввожу эту главу 8. изучающую очень неформально теорию (скорее даже "практику") множеств.

Я верю, что именно тут ее место, а не в прологе книги, я знаю по опыту, что студенты убегают, если курс начинается с немотивированного изложения "теории множеств".

Добавим, что теория множеств, собственно говоря, является очень специализированной ветвью логики, к рассмотрению которой мы в этом курсе приступает. В ней с большой виртуозностью манипулируют с системами аксиом и моделями, и она имеет очень мало общего с занятиями в средней школе под тем же названием, связанным больше с умением, чем с теорией. Так же, как и маленькие дети, мы интересуемся в этой книге множествами не для того, чтобы их изучить (или задаваться вопросом об их существовании), а затем, чтобы ими манипулировать, поскольку мы живем среди них.

После главы 8, которая не содержит теорию моделей, читатель узнает в главе 9, посвященной насыщенным моделям, как реализовать типы; в главе 10, посвященной простым моделями, он научится их опускать. Как я уже сказал, эти первые 10 глав составляют изложение "классической" или "элементарной" теории моделей, т.е. без введения понятия стабильности. Освоивший эту первую половину читатель может приступить к изучению любой области математической логики. Будет заметно, что от страницы к странице я становлюсь все свободнее, максимально ограничивая формализм в ущерб священной строгости. Это является частью обдуманного плана, поскольку воистину математика - наука, скорее хорошо использующая язык, чем строгая, и скорее краткая, чем прозрачная, а математический дух формируется лишь деформируясь. Цель этого курса будет достигнута тогда, когда читатель будет чувствовать себя непринужденно в теории моделей вместе со стилем ее языка, с ее недомолвками и соглашениями так же, как и в любой другой привычной ему обстановке.

Таким образом, если вы решили изучить поглубже теорию моделей. то вы подходите к 11-й главе о наследниках, которая вводит так называемый "парижский" подход к теории стабильности. Подойдите очень внимательно к главе 12, в которой изучаются неразличимые последовательности и все то, что их окружает. Далее в главе 13, посвященную фундаментальному порядку, вам несомненно придется легче.

Что касается главы 14, то она появляется на этом месте несколько преждевременно, чтобы вы почувствовали значение условий стабильности и увидели, что они существенны в построении насыщенных моделей. Из-за этого приходится иногда откладывать на более поздний срок окончательные версии некоторых теорем. До них вы должны освоить еще три абстрактных главы; первая посвящена ответвляемости над произвольным множеством параметров, вторая - сильным типам, и третья - различным видам рангов, возникающим в этих контекстах.

Вся совокупность этих знаний применяется в главе 18 для построения простых моделей и в главах 19, 20 для введения "теории размерности", т.е. по существу для классификации всех моделей тотально трансцендентной размерностной теории. В этих двух последних главах читатель оценит силу и адекватность развиваемой теории. Честно говоря, о ней можно говорить намного больше, чем в последних двух главах. Если я этого не сделал, то только потому, что хотел сохранить относительно элементарный характер этого курса , да и в конце концов когда-нибудь нужно остановиться. К тому же я не могу сказать ничего оригинального по этому поводу, а читатель, прочитавший мою книгу до конца, может свободно погружаться в литературу по этому вопросу.

В книге нет системы упражнений по темам каждой главы. Вы найдете только несколько легких лемм в начале курса, доказательства которых из-за их громоздскости оставлены читателю. Библиографические ссылки и исторические примечания помещены в отдельный параграф каждой главы. Это потому, что мне хотелось предложить читателю текст без нарушения целостности, а также из-за того, что я работал над этой книгой без необходимых материалов под рукой.

Дело в том, что я написал существенную часть этого курса, странствуя по Индии. Так что в моем сознании метод Генкина неразрывно связан со стадами диких слонов в болотистых лугах Кералы, к которым я приближался ползком; элиминация воображаемых элементов - со скольжением грифов над огромными гималайскими соснами; теорема о границе - с обнаженными телами женщин- мориа, которых автор неожиданно увидел на тропинке прежде, чем они успели укрыться в джунглях. Я не смею надеяться, что эта книга вызовет у моего читателя такие же чудесные образы. Я лишь пожелаю, чтобы она стала для него тем же, чем была для меня - приятной спутницей.