Feuille 1 : Ensembles, dénombrement

Exercice 1 On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad C = \{2, 4, 6\}, \qquad D = \{3, 6\}$$

1. Déterminer $B \cap D$, $C \cap D$, $B \cup D$, $C \cup D$.
2. Décrire l'ensemble $B\Delta D$, le complémentaire dans A de B, C et D.

Exercice 2 Soient les ensembles

$$A = \{1, 2, 5\},\ B = \{\{1, 2\}, 5\},\ C = \{\{1, 2, 5\}\},\ D = \{\emptyset, 1, 2, 5\},$$

$$E = \{5, 1, 2\},\ F = \{\{1, 2\}, \{5\}\},\ G = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\},\ H = \{5, \{1\}, \{2\}\}$$

1. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existant entre ces ensembles ?
2. Donner le nombre d'éléments de chaque ensemble.
3. Déterminer $A \cap B$, $G \cup H$, $E \backslash G$.

Exercice 3 Soient A, B et C trois ensembles finis. Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Exercice 4 Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A = \emptyset$ si et seulement si $B = A\Delta B$.

Exercice 5 On jette trois dés distincts dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Définir un ensemble Ω donnant la liste des toutes les possibilités que l'on peut observer. Quel est le cardinal de Ω ?
2. Soit A le sous-ensemble correspondant à : “on obtient au moins un six”. Quel est le cardinal de A ?
3. Soit B le sous-ensemble correspondant à : “deux faces au moins portent le même numéro”. Quel est le cardinal de B ?

Exercice 6

1. Avant 2008, les joueurs du loto choisissaient 6 numéros parmi 49 proposés. Combien de tirages possibles y avait-il ?
2. Depuis 2008, les joueurs choisissent 5 numéros parmi 49, et un numéro complémentaire parmi 10 numéros proposés. Combien de tirages possibles ?

Exercice 7

1. On appelle anagramme d'un mot tout mot (qu'il ait un sens ou non) formé avec les mêmes lettres. Combien y a-t-il d'anagrammes du prénom “Hélène” ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du prénom “HELENE” (sans accent) ?
3. Quinze personnes entrent dans une salle où il y a 21 chaises. Combien y a-t-il de façons d'asseoir ces 15 personnes ?
4. On considère un groupe de 20 personnes. Si chaque personne sert la main de toutes les autres, combien y a-t-il de poignées de main ?
5. On considère 20 boules, dont 12 noires et 8 rouges. Combien y a-t-il de manières de les placer en ligne ? (on ne peut discerner que leur couleur)

Exercice 8 Combien y a-t-il de façons de ranger

1. quatre boules différentes dans sept tiroirs différents ?
2. quatre boules différentes dans sept tiroirs différents, avec au plus une boule par tiroir ?
3. quatre boules identiques dans sept tiroirs différents, avec au plus une boule par tiroir ?
4. quatre boules identiques dans sept tiroirs différents ?
5. onze boules identiques dans sept tiroirs différents, avec au moins une boule par tiroir ?

Exercice 9 On dispose d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on former de mains de 5 cartes

1. ne contenant pas la dame de pique ?
2. contenant la dame de pique ?
3. contenant au moins une dame ?
4. contenant au plus une dame ?
5. contenant exactement deux dames ?
6. contenant exactement deux dames ou exactement deux piques.

Exercice 10 De combien de manière peut-on placer sur une étagère 3 romans, 2 livres de mathématiques et 1 de chimie, si :

1. aucune restriction n'est posée,
2. les livres de mathématiques doivent être rangés ensemble, et les romans aussi,
3. seuls les romans doivent être rangés ensemble.

Exercice 11 Par un raisonnement ensembliste, puis par le calcul, démontrer que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, tels que $p \leq n$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Exercice 12 Montrer la formule du binôme de Newton : pour $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} .$$