Feuille 2 : Probabilités discrètes

Exercice 1 Quatre singes participent à un essai clinique pour un nouveau type de médicament. Nous connaissons leur âge (en années) et leur espèce. Deux de ces singes sont des singes araignée âgés de 6 ans. Les deux autres sont des singes rhésus de 6 et 8 ans. Le protocole prévoit qu'on tire au sort deux singes qui recevront le nouveau médicament.

1. Rassembler les données sur les singes dans un tableau.
2. Décrire l'espace Ω de toutes les paires différentes que l'on peut tirer au hasard.
3. On considère les événements $A =$"les deux singes choisis sont de la même espèce" et $B =$"les deux singes choisis ont le même âge". Décrire $A \cap B$, $A \cup B$.

Exercice 2 Chaque matin, au réveil, Jojo peut se livrer (ou non) aux activités suivantes : se raser, se brosser les dents, écouter la radio.

1. Proposer un espace des possibles Ω modélisant cette situation.
2. Appelons A l'événement "Jojo se rase", B l'événement "Jojo se brosse les dents" et C l'événement "Jojo écoute la radio". Exprimer à l'aide des événements A, B et C les événements suivants :
   (a) ce matin, Jojo se brosse les dents, mais n'écoute pas la radio,
   (b) ce matin, Jojo n'écoute pas la radio, mais se brosse les dents,
   (c) ce matin, Jojo ne se rase pas, ne se brosse pas les dents ni n'écoute la radio,
   (d) ce matin, Jojo se brosse les dents ou se rase, mais n'écoute pas la radio.

Exercice 3 Un magasin accepte les cartes de crédits American Express ou Visa. Or 24% des clients possèdent une carte American Express, 61% une carte VISA et 11% les deux. Un client entre dans le magasin. Quelle est la probabilité qu'il possède une carte acceptée par le magasin ?

Exercice 4 On lance 4 dés à 6 faces non pipés. Donner les probabilités

1. d'obtenir 4 chiffres différents,
2. d'obtenir au moins deux faces identiques,
3. d'obtenir au moins un chiffre pair,
4. d'obtenir au moins un multiple de 3,
5. d'obtenir au moins un chiffre pair et au moins un multiple de 3.

Exercice 5 Vous participez à une loterie, et avez choisi r entiers distincts parmi les n premiers entiers. Un tirage équiprobable d'un sous-ensemble L de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de même cardinal est effectué. Quelles sont les probabilités des événements suivants ?

1. Votre choix d'entiers est le même que L.
2. Il y a exactement k de vos entiers qui se trouvent dans L.

Exercice 6

1. Soient (Ω, P) un espace de probabilité et A, B, C trois événements. Montrer que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. Un cabinet de statistiques a étudié les consommateurs d'une certaine marque. Sur 1000 consommateurs, ils ont dénombrés 312 actifs, 470 personnes mariées, 525 bacheliers dont 42 actifs, 147 bacheliers mariés, 86 actifs mariés dont 25 bacheliers. On prend une personne au hasard parmi ces 1000. Calculer la probabilité pour qu'il soit actif ou marié ou bachelier. N'y a-t-il pas un problème ?

Exercice 7 Dans une classe de 30 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves au moins soient nés le même jour ? (on considérera que l'année compte 365 jours, et que toutes les dates d'anniversaires sont indépendantes et équiprobables).

Exercice 8 Une loterie comporte 500 billets dont deux seulement sont gagnants. Combien doit-on acheter de billets pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieure ou égale à 0.5 ?

Exercice 9 Le Grand-duc de Toscane avait constaté qu'il obtenait plus souvent 10 que 9 en lançant trois dés. Pourtant, les nombres de combinaisons dont la somme font 9 et 10 sont les mêmes :

$$9 = 6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3,$$

et

$$10 = 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3.$$

Proposer un espace de probabilité modélisant cette expérience, et commenter.