# Quand le bruit est à l'origine de comportements périodiques

Christophe Poquet

Université Paris Dauphine, CEREMADE

28 juin 2014

En collaboration avec G.Giacomin, K.Pakdaman et X.Pellegrin (Paris 7).

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.

## Périodicité en neurosciences

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.
- Un tel neurone observé isolément n'a pas de comportement périodique.

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.
- Un tel neurone observé isolément n'a pas de comportement périodique.

$\rightarrow$ phénomène dû à l'**interaction** et au **bruit**.

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.
- Un tel neurone observé isolément n'a pas de comportement périodique.

$\rightarrow$ phénomène dû à l'**interaction** et au **bruit**.

- Cette apparition de périodicité a pu être obtenue par simulation de différents modèles de neurones.

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.
- Un tel neurone observé isolément n'a pas de comportement périodique.

$\rightarrow$ phénomène dû à l'**interaction** et au **bruit**.

- Cette apparition de périodicité a pu être obtenue par simulation de différents modèles de neurones.
- Ce type de phénomène est présent dans d'autres systèmes (polymères, réactions chimiques...).

- Groupes de neurones à l'origine d'émissions électriques périodiques dans les centres neuronaux dédiés à la respiration, chez les mammifères.
- Un tel neurone observé isolément n'a pas de comportement périodique.

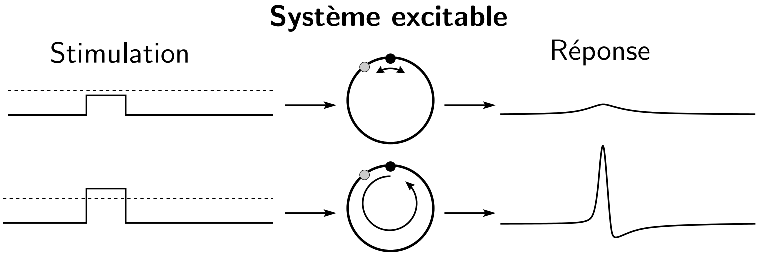
$\rightarrow$ phénomène dû à l'**interaction** et au **bruit**.

- Cette apparition de périodicité a pu être obtenue par simulation de différents modèles de neurones.
- Ce type de phénomène est présent dans d'autres systèmes (polymères, réactions chimiques...).

$\rightarrow$ point clé : **excitabilité**.

Un système excitable admet un état de repos stable, et répond de manière **non linéaire** aux perturbations :

- en cas de petite perturbation, il revient rapidement à son état de repos stable,
- si l'amplitude de la perturbation dépasse un certain seuil, il passe d'abord par son état d'excitation avant de revenir à l'état de repos.



**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables

**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables
- bruit $\rightarrow$ excitations aléatoires

**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables
- bruit $\rightarrow$ excitations aléatoires
- interaction $\rightarrow$ corrélations entres les excitations

**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables
- bruit $\rightarrow$ excitations aléatoires
- interaction $\rightarrow$ corrélations entres les excitations
- $N \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ loi des grands nombres

**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables
- bruit $\rightarrow$ excitations aléatoires
- interaction $\rightarrow$ corrélations entres les excitations
- $N \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ loi des grands nombres

**Constat :** Il peut y avoir apparition de phénomènes périodiques pour le système global, lorsque le bruit est bien dosé (ni trop fort, ni trop faible).

**Ingrédients :**

- Population de $N$ systèmes excitables
- bruit $\rightarrow$ excitations aléatoires
- interaction $\rightarrow$ corrélations entres les excitations
- $N \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ loi des grands nombres

**Constat :** Il peut y avoir apparition de phénomènes périodiques pour le système global, lorsque le bruit est bien dosé (ni trop fort, ni trop faible).

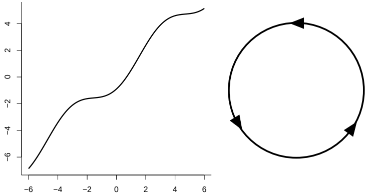
**Question :** Est-il possible de démontrer ce type de phénomène, pour un modèle simple ?

Considérons le système unidimensionnel ($\varphi \in \mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$)

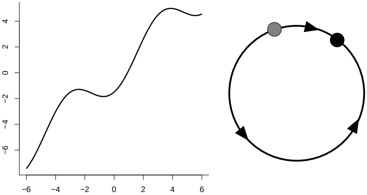
$$\mathrm{d}\varphi(t) = -V'(\varphi(t))\,\mathrm{d}t\,,$$

où $V(\theta) = \theta - a\cos\theta$ (et donc $V'(\theta) = 1 + a\sin\theta$).

$a < 1$




$a > 1$



Introduit par Kuramoto, Sakaguchi, Shinomoto (1988).

Considérons le système de phases ($\varphi_j \in \mathbb{S}^1$) :

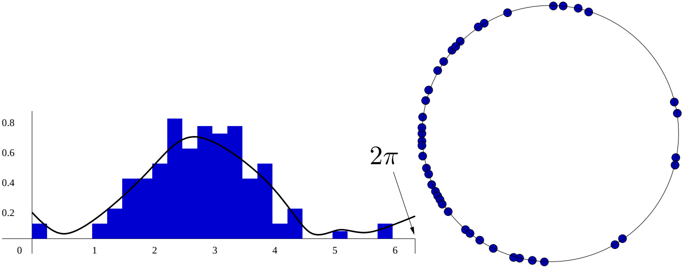
$$\mathrm{d}\varphi_j(t) \;=\; -\delta V'(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t - \frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N} \sin\left(\varphi_j(t) - \varphi_i(t)\right)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t)\,,$$

où

- $V$ est un potentiel (par exemple $V(\theta) = \theta - a\cos\theta$),
- $\{B_j\}_{j=1\ldots N}$ est une famille de mouvements Browniens indépendants,
- $\delta$, $K$ et $\sigma$ sont des constantes positives.

Définissons la mesure empirique du système :

$$\mu_{N,t}(\,\mathrm{d}\theta) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{\varphi_j(t)}(\,\mathrm{d}\theta)\,.$$



# $N = 4000,\ K = 2,\ a = 0.7,\ \delta = 0.5$

## $N = 4000,\ K = 2,\ a = 1.4,\ \delta = 0.5$

# $N = 4000$, $K = 2$, $a = 1.1$, $\delta = 0.5$

Rappel :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varphi_j(t) &= -\delta V'(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t - \frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\varphi_j(t)-\varphi_i(t)\right)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t) \\ &= -\delta V'(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t + J * \mu_{N,t}(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t)\,, \end{aligned}$$

avec $J(\theta) = -K\sin\theta$.

Rappel :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\varphi_j(t) &= -\delta V'(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t - \frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin\left(\varphi_j(t)-\varphi_i(t)\right)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t) \\
&= -\delta V'(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t + J * \mu_{N,t}(\varphi_j(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t)\,,
\end{aligned}
$$

avec $J(\theta) = -K\sin\theta$.

Si $\mu_{N,0}(\mathrm{d}\theta) \to p_0(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ lorsque $N \to \infty$, alors la mesure empirique $\mu_{N,t}$ admet une **limite déterministe** lorsque $N \to \infty$, qui est la solution de l'EDP

$$
\partial_t p_t(\theta) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta\left[p_t(\theta) J * p_t(\theta)\right] + \delta\partial_\theta\left[p_t(\theta)V'(\theta)\right]\,.
$$

## $N = \infty$, $K = 2$, $a = 1.1$, $\delta = 0.5$

Pour $\delta$ petit, l'EDP

$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] + \delta\partial_\theta \left[p_t(\theta)V'(\theta)\right]$$

est une perturbation de

$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] .$$

Pour $\delta$ petit, l'EDP

$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] + \delta\partial_\theta \left[p_t(\theta)V'(\theta)\right]$$

est une perturbation de

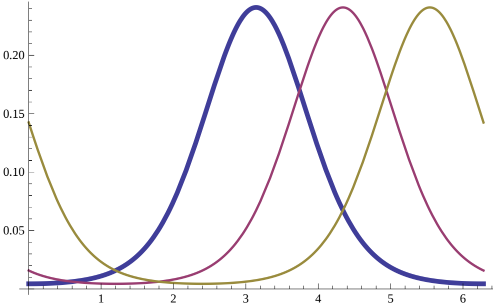
$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] .$$

Il s'agit de l'EDP limite correspondant au système de $N$ rotateurs ne subissant **que l'interaction et le bruit** :

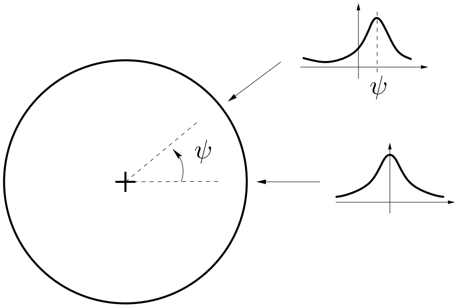
$$\mathrm{d}\varphi_j(t) \;=\; -\frac{K}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin(\varphi_j(t) - \varphi_i(t))\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}B_j(t)\,.$$

## $N = 1000,\ K = 2,\ \sigma = 1$

Si l'interaction est assez forte $K > \sigma^2$ , l'EDP avec $\delta = 0$ admet une famille de solutions stationnaires :



Si l'interaction est assez forte $K > \sigma^2$ , l'EDP avec $\delta = 0$ admet une famille de solutions stationnaires :



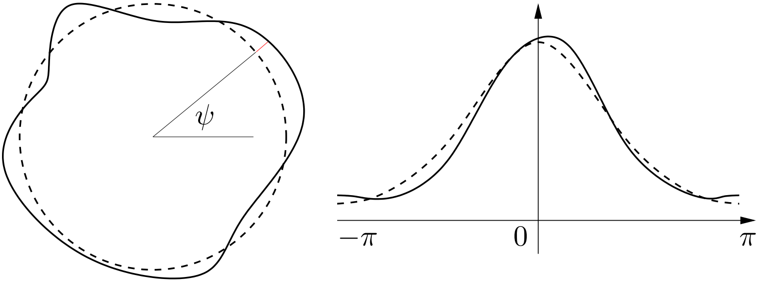
Revenons au modèle perturbé :

$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{1}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] + \delta\partial_\theta \left[p_t(\theta)V'(\theta)\right].$$

Revenons au modèle perturbé :

$$\partial_t p_t(\theta) = \frac{1}{2}\partial_\theta^2 p_t(\theta) - \partial_\theta \left[p_t(\theta)(J * p_t)(\theta)\right] + \delta\partial_\theta \left[p_t(\theta)V'(\theta)\right].$$

Le cercle de solutions stationnaires est déformé de manière régulière en une **courbe invariante** pour la dynamique perturbée :



- Preuve pas entièrement satisfaisante : fait intervenir un système à l'équilibre, alors que l'excitabilité est un phénomène loin de l'équilibre.

- Preuve pas entièrement satisfaisante : fait intervenir un système à l'équilibre, alors que l'excitabilité est un phénomène loin de l'équilibre.

- Preuve pour des modèles plus complexes, plus réalistes (par exemple de neurones) ?