Feuille 7 : Représentations maticielles des applications linéaires

Exercice 1-1

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ et $f : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ une application définie par $f(v) = Av$, $\forall v \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Montrer que f est une application linéaire.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donner une expression explicite de $f(v)$ pour chaque $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 1-2 Trouver les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canonique des espaces vectoriels correspondants.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, -x + y)$.
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, -x + y, 2x - y)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + 4y + z, -x + y + z)$.

Exercice 1-3 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (2x - y + z, -x - y, 5x - y)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 2, 0), (0, 1, -1), (0, 1, 1))$ est une base pour $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice de f dans la base canonique.
3. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
4. Trouver la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et la base canonique pour l'espace de arrivée.
5. Trouver la matrice de f dans la base canonique pour l'espace de départ et la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de arrivée.

Exercice 1-4 Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $h(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $h(e_2) = e_1 + e_2 - e_3$, $h(e_3) = e_1 - 2e_3$.

1. Trouver la matrice M de f dans la base $\mathcal{C}$.
2. Quel est le rang de M ?

Exercice 1-5 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base pour le noyau de f.
2. Déterminer une base de l'image de f. Quel est le rang de A ?

Exercice 1-6 Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u, v)$ et $\mathcal{B}' = (u', v', w')$ deux familles libres dans E. On considère l'application linéaire $f : \mathrm{Vect}(u, v) \to \mathrm{Vect}(u', v', w')$ définie par $f(u) = u' + 2v'$ et $f(v) = w'$.

1. Trouver la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ pour $\mathrm{Vect}(u, v)$ et $\mathrm{Vect}(u', v', w')$ respectivement.
2. Trouver la dimension du noyau et de l'image de f.

Exercice 1-7 Soient $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_2 - e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 4e_3$. On considère $v_1 = 2e_1 - e_2$, $v_2 = -e_1 + e_3$, $v_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base pour $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver la matrice A de f dans la base $\mathcal{C}$ et puis trouver la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$. Quelle identité vérifient les matrices A et B ?

Exercice 1-8 Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soient $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = 2e_1 - e_2 + e_3$, $w = 2e_1 - 2e_2 + e_3$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
3. Déterminer la matrice R de g dans la base $\mathcal{B}$.
4. (a) Calculer $P^{-1}AP$ en fonction de R.
   (b) Calculer R^4 et en déduire les valeurs de A^{4n}.

Exercice 1-9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par $g(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$, $g(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$, $g(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de g dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{v \in \mathbb{R}^3 : g(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : -2v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base $\mathcal{B} = (b, c)$ de F.
4. Montrer que $(a, b, g(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1-10 Soit $E \subset C^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions qui satisfont $y'' + y = 0$.

1. Montrer que $\alpha = \cos x \in E$ et $\beta = \sin x \in E$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ est une base pour E, sachant que $\dim E = 2$.
3. On considère $g : \mathbb{R}^2 \to E$ définie par $\forall v = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ g(v) = a\cos x + b\sin x$. Trouver la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et la base $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ de E.
4. Montrer que g est une bijection.

Exercice 1-11 Soit $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(P) = (P(-1), P(1))$.

1. Montrer que u est une application linéaire.
2. Trouver la matrice de u dans les bases canoniques $(1, X, X^2, X^3)$ et (e_1, e_2) de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 1-12 Soit $h : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $h(P) = \displaystyle\int_1^x 2P(t)dt$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 2 + X, 4X + X^2)$ est une base pour $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Trouver la matrice de h la base $\mathcal{B}$ pour l'espace de départ et la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ pour l'espace d'arrivée.

Exercice 1-13 Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = P - (X - 2)P'$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Montrer que $\mathcal{B} = (1, X - 2, (X - 2)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
6. Déterminer la matrice de passage de P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer P^{-1}.
7. Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.