Exercice 1

1. : Question de cours : Donner la définition d'un projecteur et d'une symétrie.
2. Soient Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose que $p \circ q = 0$. On note $r = p + q - q \circ p$.
   (a) Montrer que r est un projecteur.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de r.
3. Question de cours : Théorème fondamental de l'analyse.
4. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t)dt = 0.$$

Exercice 2

1. Question de cours : Soient $A,\ B,\ C$ des matrices réelles carrées de taille n. Les affirmations suivantes sont-elles correctes : $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$? $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$? $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$? Donnez le nom de la propriété utilisée en cas d'égalité, et un contre exemple dans le cas contraire.
2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$AB - BA = A$$

   Calculer $\mathrm{Tr}(A^p)$ pour tout entier p.
3. Question de cours : Définition d'une somme de Riemann, d'une fonction intégrable.
4. Donner les limites des suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

Exercice 3

1. Question de cours : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Peut-on trouver une application linéaire de noyau F ? Si oui, donner un exemple, si non, construire un contre exemple.
2. (a) Dans un espace de dimension finie, quelle relation a-t-on entre le rang et la trace d'un projecteur ?
   (b) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^q = I_n$ pour un entier q donné. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Tr}(A^k).$$

3. Question de cours : Intégration par parties.
4. Calculer

$$\int_0^1 \ln(1 + t^2)dt$$