

Exercice 1

1. Questions de cours : Signature d'un cycle.
2. Soit $n \geq 5$. Montrer que si (abc) et $(a'b'c')$ sont deux cycles d'ordre 3 de S_n , alors il existe une permutation σ , paire, telle que

$$\sigma \circ (abc) \circ \sigma^{-1} = (a'b'c')$$

Exercice 2

1. Questions de cours : Énoncer et prouver le théorème des séries alternées.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Que peut-on dire de $\sum u_n$ où $u_n = \prod_{i=0}^n a_i$?

Exercice 3

1. Questions de cours : Que vaut le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales ? Le prouver.
2. Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de colonnes C_1, \dots, C_n . On définit B la matrice de colonnes

$$C_1 - C_2, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n - C_1$$

Que vaut $\det(B)$?

Exercice 4

1. Questions de cours : Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Définir et justifier l'existence de $\exp(a)$.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Comparer les assertions
(a) La série de terme général a_n converge
(b) La série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

Exercice 5

1. Question de cours : Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

Exercice 6

1. Question de cours : Rappeler et prouver le théorème de comparaison par négligeabilité pour des séries à termes positifs.
2. Définissons

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. Quelle est la nature de la série de terme général v_n où

$$v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} ?$$