

Correction exo 1 question 10 feuille 4

*Démonstration.* Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u_{10}$ . Puisque  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on va distinguer 3 cas :

1.  $\lambda = 0$  : Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $u_{10}(f) = 0$ . Ceci nous apprend que  $f'$  est constante. Puisque  $f$  est  $2\pi$ -périodique, on a nécessairement  $f' = 0$ . Il est alors aisé de vérifier que toute fonction constante  $f$  est  $2\pi$ -périodique et vérifie  $u_{10}(f) = 0$ .

Enfin,  $0 \in \text{Sp}(u_{10})$  et on a  $E_0 = \{f : x \rightarrow c \mid c \in \mathbb{R}\}$ .

2.  $\lambda > 0$  : Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $u_{10}(f) = \lambda f$ . Le cours sur les équations différentielles nous apprend alors :  $\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \exp(\sqrt{\lambda}x) + B \exp(-\sqrt{\lambda}x)$ . Une étude de la limite de  $f$  en  $+\infty$  nous apprend que  $f$  n'est pas bornée si  $A \neq 0$ . De même, si  $B \neq 0$ , l'étude de  $\lim f$  en  $-\infty$  nous apporte  $f$  non bornée. Ces deux cas sont exclus, car  $f$  est  $2\pi$ -périodique et donc bornée sur  $\mathbb{R}$ . On retire donc  $f = 0$  et donc  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $u_{10}$ .

3.  $\lambda < 0$  : Soit  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $u_{10}(f) = \lambda f$ . Le cours sur les équations différentielles nous apprend alors :  $\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x + B)$ . Cette fonction est  $\frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda}}$ -périodique, puisqu'on la veut aussi  $2\pi$ -périodique il faut nécessairement que  $2\pi$  soit un multiple de  $\frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda}}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^* \mid 2\pi = n \frac{2\pi}{\sqrt{-\lambda}}$ , ce qui équivaut à  $n = \sqrt{-\lambda}$ . Enfin, on vérifie facilement que, s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n = \sqrt{-\lambda}$ , on a bien, avec  $f : x \rightarrow A \cos(\sqrt{-\lambda}x + B)$  pour  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $u_{10}(f) = \lambda f$  et  $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Enfin,  $\text{Sp}(u_{10}) = \{-n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ . De plus, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $E_{-n^2} = \{f : x \rightarrow A \cos(nx + B) \mid A, B \in \mathbb{R}\}$ . □