Correction exo 5 feuille 3

Exercice 1. On note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\sigma(P) = XP$ pour tout polynôme P.

1. Montrer que $\{0\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ.
2. Soit $S \subset \mathbb{R}[X]$ un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ et non réduit à $\{0\}$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir un polynôme A de degré minimal dans $S \setminus \{0\}$.
   (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $QA \in S$.
   (c) Soit $B \in S$. En effectuant la division euclidienne de B par A, montrer que A divise B.
3. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ stables par σ ?

Démonstration. 1. Soit E un $\mathbb{R}$-sev stable par σ. Soit P un polynôme non nul de E. Alors, par σ-stabilité, E contient aussi $(XP, X^2P, X^3P, ...)$. Cette famille est libre (constituée de polynômes de degrés distincts) et infinie, donc E est de dimension infinie. Donc si E est σ-stable et de dimension finie, il ne contient aucun polynôme non nul et c'est donc $\{0\}$.

2. (a) L'ensemble $D = \{\partial(P) | P \in S \setminus \{0\}\}$ est inclus dans $\mathbb{N}$ et non vide. Il admet donc un minimum. Notons m ce minimum et considérons un polynôme $A \in S$ avec $\partial(A) = m$. Il existe bien un tel A par définition de m, puisque $m \in D$.
   (b) Par σ-stabilité, la famille $(A, XA, X^2A, ..., X^{\partial(Q)}A)$ est incluse dans S qui est un $\mathbb{R}$-sev, donc puisque $QA \in$Vect$(A, XA, X^2A, ..., X^{\partial(Q)}A)$, on a bien $QA \in S$.
   (c) Comme l'énoncé le suggère, effectuons la division euclidienne de B par A : $B = QA+R$ avec $\partial(R) < m$. Par la question précédente, on sait que $QA \in S$ d'où $R = B - QA \in S$. Mais alors, par minimalité de m, on a nécessairement $R = 0$ et donc A divise B.
3. Finalement, les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ sont donc $\{0\}$ et les $A\mathbb{R}[X]$ pour tout A dans $\mathbb{R}[X]$ (ceci recouvre le premier cas avec $A = 0$).

$\square$