Corrigé du DM

Exercice 6

1) a) Puisque $v \circ w = 0$, on a : (*) $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} v$. Par le théorème du rang,

$\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} w + \dim \operatorname{Im} w = \dim E \\ \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim E \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \dim \operatorname{Ker} w + \dim \operatorname{Ker} v \geq \dim E \quad (**) \\ \underline{\operatorname{rg} v + \operatorname{rg} w \leq \dim E.} \end{cases}$

En effet, (*) donne $\operatorname{rg} w \leq \dim \operatorname{Ker} v$.

b) $(u - \alpha Id) \circ (u - \beta Id) = u^2 + bu + c Id$ par définition de α et β.

$\underline{= 0}$

c) Via (**), il suffit de montrer que $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id) \cap \operatorname{Ker}(u - \beta Id) = \{0\}$.

Or, si $x \in \operatorname{Ker}(u - \alpha Id) \cap \operatorname{Ker}(u - \beta Id)$ on a $u(x) = \alpha x = \beta x$.

En particulier, $(\alpha - \beta) x = 0$ et $\alpha \neq \beta$ puisque $\Delta = b^2 - 4c > 0$.

D'où $x = 0$. et $\operatorname{Ker}(u - \alpha Id) \cap \operatorname{Ker}(u - \beta Id) = \{0\}$.

Finalement, $\underline{\operatorname{Ker}(u - \alpha Id) \oplus \operatorname{Ker}(u - \beta Id) = E}$

2) a) Soit $x \in E \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $u(x) = \lambda x$, on a $(u^2 + bu + c Id)(x) = \lambda^2 x + b\lambda x + cx$
$= 0$.

comme $x \neq 0$ ceci donne $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et λ est racine de $X^2 + bX + c$. Comme $\Delta < 0$, ce polynôme n'a pas de racines réelles, donc l'hypothèse $u(x) = \lambda x$ amène une contradiction.

D'où $u(x) \neq \lambda x$.

b) Soit $y \in E \setminus \{0\}$. Si $\operatorname{Vect}(\{y\})$ est stable par u, $u(y) \in \operatorname{Vect}(\{y\})$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $u(y) = \lambda y$.

Via la question précédente, on obtient bien que $\operatorname{Vect}(\{y\})$ ne peut être stable par u.

c) Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in \operatorname{Vect}(\{u^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\})$. $\exists n_1, \dots n_m \in \mathbb{N}$, $y_1, \dots y_m \in \mathbb{R}$ tq

$y = \sum_{i=1}^{m} y_i u^{n_i}(x)$ $\quad u(y) = \sum_{i=1}^{m} y_i u^{n_i+1}(x) \in \operatorname{Vect}(\{u^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\})$ qui est donc

stable par u.

D'autre part, $(u^2 + bu + c Id)(x) = 0$ d'où $u^2(x) = -bu(x) - cx$

On en déduit par une récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u^n(x) \in \operatorname{Vect}(\{u(x), x\})$: Vrai au rang $n = 0, 1, 2$

Soit $n \geq 2$ quelconque fixé. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n.

$u^{n+1}(x) = u^{n-1}(u^2(x)) = u^{n-1}(-bu(x) - cx)$
$= -b u^n(x) - c u^{n-1}(x) \in \operatorname{Vect}(\{u(x), x\})$ par HDR.

Finalement, $\underline{\operatorname{Vect}(\{u^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \operatorname{Vect}(\{x, u(x)\})} = P(x)$

d) Soit $y \in P_x \cap S$. Supposons $y \neq 0$. Puisque S et P_x sont stables par u, $P_x \cap S$ est stable par u : $u(y) \in P_x$ et $u(y) \in S$ donc $u(y) \in P_x \cap S$.
Mais, via la question 2a), $\mathrm{Vect}(\{u(y), y\})$ est un plan de E. Donc $\dim(P_x \cap S) \geq 2$.
Donc $P_x \subseteq P_x \cap S \subseteq S$ donc $P_x \subset S$ ou $P_x \cap S = \{0\}$.

e) i) Puisque $x_i \notin P_{x_1} + \dots + P_{x_{i-1}}$, on obtient $x_1, \dots, x_i$ qui est une famille libre.
Son nombre d'éléments est nécessairement inférieur à $\dim E$, donc la procédure termine.
ii) $k = 1$: Vrai et rien à montrer.
Supposons le résultat vrai pour un $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons qu'on puisse définir x_{k+1}
Puisque $x_{k+1} \notin P_{x_1} \oplus \dots \oplus P_{x_k}$, via la question d) on obtient $P_{x_{k+1}} \cap P_{x_1} \oplus \dots \oplus P_{x_k} = \{0\}$
et donc $P_{x_1} \oplus \dots \oplus P_{x_{k+1}}$.
iii) $E = P_{x_1} \oplus \dots \oplus P_{x_k}$ où k est le rang où la procédure s'arrête. On a $\dim E = \sum_{i=1}^{k} \dim P_{x_i} = 2k$
et les P_{x_i} sont bien des plans stables par u.

f) Via 2) d) et 2) e) iii), tout sous-espace stable de E s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^{n} P_{x_{i_j}}$
Son supplémentaire stable est donc $\sum_{\substack{l=1 \\ l \notin \{i_1, \dots, i_n\}}}^{k} P_{x_l}$

3) $b^2 - 4c = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, u^2 + bu + c\mathrm{Id} = (u - \alpha \mathrm{Id})^2$.
Donc si $u^2 + bu + c\mathrm{Id} = 0$ on a $u - \alpha \mathrm{Id} = 0$ ou $u - \alpha \mathrm{Id}$ nilpotent d'indice 2.

u homothétie

$\{0\} \neq \mathrm{Im}(u - \alpha \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id})$
$\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id})$ est stable par u. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id})$. $\mathrm{Im}(u - \alpha \mathrm{Id}) = \underbrace{\mathrm{Im}(u - \alpha \mathrm{Id})_{|F}}_{\neq \{0\}} \subset \mathrm{Ker}(u - \alpha \mathrm{Id})$.
En particulier, F n'est pas stable par u.