

Exercice 1-1 1) $1/25$ 2) $-125x^3$ 3) 1 4) $\sqrt{\sqrt{2}}$ 5) $4\sqrt{y}$ 6) $\frac{x^2}{y^2}$ 7) $\frac{\sqrt[3]{x}}{5}$ 8) $\frac{-1}{y(x+1)}$ 9) 0

10) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{2+3(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{5x+3}{x^2-1}$. La réponse est donc $\frac{1}{x^2-1}$.

11) On peut mettre x en facteur en haut mais aussi x^{-4} en bas. On obtient au numérateur $x(1+x+x^2+x^3)$ et au dénominateur $(x^3+x^2+x+1)x^{-4}$. La réponse est donc $\frac{x}{x^{-4}} = x^5$.

12) En haut on factorise $1+x^5 = (1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)$ et en bas on met x^{-6} en facteur. Au bout du calcul, on trouve x^6+x^7 .

Exercice 1-2

Les réponses attendues sont respectivement $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ et $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2+6abc$.

Exercice 1-3

De l'hypothèse $x-y=1$ on peut tirer x en fonction de y , à savoir $x=y+1$. En substituant cette expression de x dans la formule à transformer, on obtient $(y+1)^3-3(y+1)y-y^3=y^3+3y^2+3y+1-3y-3y^2-y^3=1$.

Exercice 1-4

1) Après une recherche informelle au brouillon, on choisit $a=1$ et $b=-1$ puis on vérifie qu'ils conviennent :

soit $k \in \mathbf{N}^*$, alors $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, alors, en effectuant le changement de notation $l=k$ dans la première somme et le changement de variable $l=k+1$ dans la seconde :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

3) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on a alors :

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^n k \right) \left(\prod_{k=1}^n (k+1) \right)} = \frac{1}{n!(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n!)^2}.$$

Exercice 1-5

1) a) Notons (H_n) le prédicat : " $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

* (H_0) est vrai, dès lors qu'elle se transcrit en $0=0$.

* Soit n un entier naturel, supposons (H_n) vrai. On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^n k \right) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

L'énoncé (H_{n+1}) est donc également vrai.

Le principe de récurrence assure dès lors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'énoncé (H_n) est vrai.

b) On effectue dans un premier temps le calcul suivant, où on pose dans un premier temps $l=n-k$ puis où on renomme l en k :

$$\sum_{k=0}^n (n-k) = \sum_{l=0}^n l = \sum_{k=0}^n k.$$

Cette identité se développe en $\sum_{k=0}^n n - \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n k$, d'où :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n n \right) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 1-6

1) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right) &= \sum_{i=0}^n \left(\left(\sum_{j=0}^n i \right) + \left(\sum_{j=0}^n j \right) \right) = \sum_{i=0}^n \left(((n+1)i) + \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \right) \\ &= (n+1) \sum_{i=0}^n i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=0}^n 1 = (n+1) \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} (n+1) = n(n+1)^2. \end{aligned}$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i i j \right) &= \sum_{i=0}^n i \left(\sum_{j=0}^i j \right) = \sum_{i=0}^n i \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i^3 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \\ &= n(n+1) \frac{3n(n+1) + 2(2n+1)}{24} \\ &= n(n+1) \frac{3n^2 + 7n + 2}{24}. \end{aligned}$$

Exercice 1-7

1) Dans les intervalles de variation proposés pour i et j , il est manifeste que le plus grand des deux varie entre 0 et n . Étant fixé un entier k dans cet intervalle, le nombre de couples (i, j) pour lesquels le plus grand des deux est k est égal à $2k+1$: ce sont les couples (i, k) où i varie entre 0 et $k-1$, les couples (k, j) où j varie entre 0 et $k-1$, et le couple (k, k) .

2) En regroupant la somme proposée par valeurs prises par la fonction sommée, on obtient une sommation allant de 0 à n et dont le k -ème terme est obtenu en regroupant $2k+1$ termes valant k : il vaut donc $(2k+1)k$.

3) On déduit de ce qui précède que :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k = 2 \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}.$$

Exercice 1-8

1) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $-3x+4 \geq x-3 \iff 7 \geq 4x \iff x \leq \frac{7}{4}$.

2) On factorise préalablement le trinôme du second degré présent dans la formule, à l'aide des formules à base de discriminant par exemple. On sait alors que les solutions de l'inéquation sont les réels x extérieurs à l'intervalle délimité par les deux racines ; cette inéquation est donc vérifiée pour :
 $x \in]-\infty, 2-\sqrt{6}] \cup [2+\sqrt{6}, +\infty[$.

3) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $(x+2)^2 < -x \iff x^2+5x+4 < 0$. En procédant comme à la question précédente, ceci est vérifié pour $x \in]-4, -1[$.

4) Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $x^3-6x \geq x^2 \iff x^3-x^2-6x \geq 0 \iff (x+2)x(x-3) \geq 0$.
 En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in [-2, 0] \cup [3, +\infty[$.

Exercice 1-9

1) Pour a réel, on calcule la différence $A - B$ ou, pour éviter les dénominateurs encombrants, son multiple : $12(A - B) = 4(a^4 - 7a^2 + 4) - 3(a^4 - 9a^2 + 5) = a^4 - a^2 + 1$. En notant $b = a^2$, on constate qu'il s'agit d'une expression polynomiale en b , du second degré, à discriminant strictement négatif et à coefficient dominant strictement positif. Cette expression est donc strictement positive pour toute valeur réelle de b (et donc aussi de a). Autrement dit, A est toujours strictement supérieur à B .

2) Pour a réel, on calcule la différence $C - D$ ou, pour éviter les dénominateurs encombrants, son multiple : $12(C - D) = 4(a^4 + ma^2 + 2) - 3(a^4 + na^2 + 3) = a^4 + (4m - 3n)a^2 - 1$. Pour alléger les notations, on note $p = 4m - 3n$ et $b = a^2$, on dispose ainsi de l'expression $12(C - D) = b^2 + pb - 1$. Le discriminant de cette fonction polynomiale de b est $p^2 + 4$: il est strictement positif et il existe donc deux valeurs de b annulant l'expression. De plus, le produit de ces valeurs est -1 : l'une au moins est donc strictement positive. Le signe de l'expression varie donc quand b varie dans $\mathbf{R}^+$; en revenant à la variable initiale, on conclut qu'il varie quand a varie dans $\mathbf{R}$.

Exercice 1-10

1) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$. Alors $\frac{-2}{6x+5} > 1 \iff 1 - \frac{-2}{6x+5} < 0 \iff \frac{6x+7}{6x+5} < 0$.

En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in]-\frac{7}{6}, -\frac{5}{6}[$.

2) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$. Alors $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{3x+2} \iff 0 < \frac{2}{3x+2} - \frac{1}{x-2} = -\frac{x+6}{(3x+2)(x-2)}$.

En dressant un tableau de signes, on conclut que ceci est vérifié pour $x \in]-\infty, -6[\cup]-\frac{2}{3}, 2[$.

Exercice 1-11

Soit x et y deux réels. On calcule alors la différence :

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - |xy| = \frac{x^2 - 2|xy| + y^2}{2} = \frac{|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2}{2} = \frac{(|x| - |y|)^2}{2} \geq 0,$$

ce qui prouve l'inégalité proposée.

Exercice 1-12

Soit x un réel avec $-1 \leq x \leq 1$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |1 - x^7| &= |(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)| = |1-x||1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6| \\ &\leq |1-x|(1+|x|+|x^2|+|x^3|+|x^4|+|x^5|+|x^6|) \leq |1-x|(1+1+1+1+1+1+1) = 7|1-x| \end{aligned}$$

Exercice 1-13

Soit x un réel. En se concentrant sur la formule qui définit $f(x)$ on est amené à distinguer deux cas :

* Si $0 \leq 1-x \iff x \leq 1$, alors $f(x) = |2 - (1-x)| = |x+1|$, ce qui mène à distinguer deux sous-cas :

- Si $x+1 < 0 \iff x < -1$, $f(x) = -x-1$.
- Si $0 \leq x+1 \iff -1 \leq x$, $f(x) = x+1$;

* Si $1-x < 0 \iff 1 < x$, alors $f(x) = |2 + (1-x)| = |3-x|$, ce qui mène à distinguer deux sous-cas :

- Si $0 \leq 3-x \iff x \leq 3$, $f(x) = 3-x$;
- Si $3-x < 0 \iff 3 < x$, $f(x) = x-3$.

Exercice 1-14

Soit x un réel.

* Si $0 \leq 2-x \iff x \leq 2$, alors $|2-x| \leq 3-x \iff 2-x \leq 3-x \iff 2 \leq 3$: c'est donc toujours vrai.

* Si $2-x < 0 \iff 2 < x$, alors $|2-x| \leq 3-x \iff x-2 \leq 3-x \iff 2x \leq 5 \iff x \leq \frac{5}{2}$.

On conclut que l'inéquation proposée est vraie si et seulement si $x \leq \frac{5}{2}$.

Exercice 1-15

Une recherche au brouillon mène à l'hypothèse selon laquelle $a = 1$, $b = -2$ et $c = 4$ qu'on n'a plus qu'à vérifier en effectuant, pour x réel, le produit $(x+1)(x^2-2x+4)$.

Ceci étant connu, on est amené, comme à l'exercice précédent, à distinguer deux cas en fonction du signe de $x+1$; après les avoir traités soigneusement on conclut que l'inéquation est vraie si et seulement si $-1 < x$.

Exercice 1-16

$$1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

tandis que $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0^n = 0$ (du moins pour $1 \leq n$, pour $n = 0$ la réponse est 1).

2) a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit p entier avec $1 \leq p \leq n$. On peut alors écrire :

$$p \binom{n}{p} = p \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(p-1)![(n-1)-(p-1)]!} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

b) Soit $n \in \mathbf{N}$, alors :

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^n n \binom{n-1}{p-1} = n \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} = n 2^{n-1}.$$

3) Une solution astucieuse (parmi beaucoup d'autres) est d'ajouter à la somme à calculer une deuxième somme choisie pour exploiter la formule du triangle de Pascal.

On examine ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} + \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} &= \binom{p+0}{0} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{p+k}{k-1} + \binom{p+k}{k} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{p+k+1}{k} \\ &= 1 + \sum_{l=2}^{n+1} \binom{p+l}{l-1} \quad (\text{on fait } l = k+1) \\ &= \binom{p+1}{0} + \sum_{l=2}^n \binom{p+l}{l-1} + \binom{p+n+1}{n} \\ &= \sum_{l=1}^n \binom{p+l}{l-1} + \binom{p+n+1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1} + \binom{p+n+1}{n} \quad (\text{on change le nom de l'indice}). \end{aligned}$$

En retranchant $\sum_{k=1}^n \binom{p+k}{k-1}$ aux deux côtés de l'égalité, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 1-17

1) Soit k entier avec $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}.$$

2) Soit k entier avec $0 \leq k \leq n-1$. Alors :

$$\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{k+1}} = \frac{\left(\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \right)}{\left(\frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!} \right)} = \frac{(k+1)!}{k!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{(2n-k)!} = \frac{k}{2n-k}.$$

L'inégalité $k \leq n-1$ fournit $1-n \leq -k$ puis, en ajoutant $2n$, on obtient : $n+1 \leq 2n-k$. D'où on conclut que $0 \leq k \leq n-1 < n+1 \leq 2n-k$ et enfin que $\frac{k}{2n-k} < 1$.

On sait donc désormais que $\frac{\binom{2n}{k}}{\binom{2n}{k+1}} < 1$. En multipliant par le nombre positif $\binom{2n}{k+1}$ on obtient l'inégalité

proposée.

On a ainsi montré la chaîne d'inégalités :

$$\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \dots < \binom{2n}{n-1} < \binom{2n}{n}.$$

En réécrivant chacun des coefficients binomiaux qui y figurent à l'aide de la question 1, on obtient :

$$\binom{2n}{2n} < \binom{2n}{2n-1} < \dots < \binom{2n}{n+1} < \binom{2n}{n}.$$

Ces deux chaînes d'inégalités montrent bien que $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des nombres $\binom{2n}{k}$ où k varie entre 0 et $2n$.

3) À l'aide de la question précédente, on peut écrire la majoration :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1) \binom{2n}{n}.$$

Par ailleurs $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$ (c'est une conséquence de la question 1 de l'exercice précédent).

En rapprochant ces deux informations, on obtient l'inégalité proposée.

Exercice 1-101

1) Comme au 1-4 on cherche au brouillon des valeurs plausibles. Après avoir émis l'hypothèse qu'il est bon de prendre $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$ on teste ces valeurs sur l'expression de droite et on constate qu'elles conviennent.

2) Vu la préparation faite à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{l=3}^n \frac{1}{l} \right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=3}^n \frac{1}{l} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=3}^n \frac{1}{l} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

Exercice 1-102

1) On copie-colle la réponse à la question 3 de l'exercice 7, sans calculer la somme S ; ceci donne :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = \sum_{k=0}^n (2k+1)k = 2 \sum_{k=0}^n k^2 + \sum_{k=0}^n k = 2S + \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 2) a) On remarque que pour $0 \leq j \leq i$ on a : $\text{Max}(i, j) = i$ tandis que pour $i + 1 \leq j \leq n$, on a : $\text{Max}(i, j) = j$. On peut donc découper :

$$\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{j=0}^i \text{Max}(i, j) + \sum_{j=i+1}^n \text{Max}(i, j) = \sum_{j=0}^i i + \sum_{j=i+1}^n j.$$

b) D'une part, $\sum_{j=0}^i i = i \sum_{j=0}^i 1 = i(i+1)$ et d'autre part $\sum_{j=i+1}^n j = \sum_{j=0}^n j - \sum_{j=0}^i j = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}$.

- 3) Il découle de la question précédente que :

$$4 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = 4 \sum_{i=0}^n \left(i(i+1) + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right) = 2 \sum_{i=0}^n (n(n+1) + i^2 + i)$$

- 4) On poursuit le calcul entrepris à la question précédente :

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) &= 2 \sum_{i=0}^n (n(n+1) + i^2 + i) \\ &= 2 \sum_{i=0}^n n(n+1) + 2 \sum_{i=0}^n i^2 + 2 \sum_{i=0}^n i \\ &= 2n(n+1)^2 + 2S + n(n+1) \\ &= 2S + n(n+1)(2n+3) \end{aligned}$$

On soustrait à cette égalité l'égalité écrite au 1 et on obtient :

$$3 \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right) = n(n+1)(2n+3) - \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) \frac{4n+6-1}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{2}.$$

Exercice 1-103

Notons (H_n) le prédicat : " $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

* (H_0) est vrai, dès lors qu'elle se transcrit en $0 = 0$.

* Soit n un entier naturel, supposons (H_n) vrai. On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

L'énoncé (H_{n+1}) est donc également vrai.

Le principe de récurrence assure dès lors que pour tout $n \in \mathbf{N}$ l'énoncé (H_n) est vrai.

Exercice 1-104

1) Pour x réel, on sait factoriser $x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$. On termine par un tableau de signes ; les solutions sont les x de $] -3, -2[\cup]2, 3[$.

2) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$. On calcule :

$$\frac{x+6}{x+1} - \frac{x-6}{3-x} = \frac{(x+6)(x-3) + (x+1)(x-6)}{(x+1)(x-3)} = \frac{2x^2 - 2x - 24}{(x+1)(x-3)} = 2 \frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)(x-3)}.$$

Un tableau de signes permet de conclure : les solutions sont les x de $] -\infty, -3[\cup] -1, 3[\cup]4, +\infty[$.

3) Soit x un réel.

* Si $x < 3$, $|x - 7| = 7 - x > 7 - 3 = 4$ et *a fortiori* $|x - 3| + |x - 7| > 4$. Le réel x n'est donc pas solution.

* Si $3 \leq x \leq 7$, alors $|x - 3| + |x - 7| = (x - 3) + (7 - x) = 4$ et le réel x est donc solution.

* Si $7 < x$, $|x - 3| = x - 3 > 7 - 3 = 4$ et *a fortiori* $|x - 3| + |x - 7| > 4$. Le réel x n'est donc pas solution.

Les solutions sont donc les x tels que $3 \leq x \leq 7$.

4) Soit x un réel. Par l'inégalité triangulaire,

$$1 = |2 - 1| = |(2 - x) + (x - 1)| \leq |2 - x| + |x - 1| = |x - 1| + |x - 2|.$$

Le réel x n'est donc pas solution.

Exercice 1-105

1) On observe $y - m = y - \frac{x+1}{2} = \frac{y-x}{2}$. Comme on a supposé $x \leq y$ on conclut que la différence $y - m$ est elle aussi positive. Ceci prouve que $y \leq m$.

2) On étudie cette fois :

$$m - g = \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{2} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2}{2} \geq 0.$$

Ceci prouve que $g \leq m$.

3) Dans cette question et la suivante, il peut être confortable de noter $a = 1/x$ et $b = 1/y$. Une demi-ligne de calcul montre que la différence $\frac{1}{x} - \frac{1}{h}$ vaut $\frac{a-b}{2}$. Elle est donc positive. Tous les nombres intervenant dans l'exercice sont strictement positifs, on peut inverser et obtenir l'inégalité $x \leq h$.

4) Ici la différence $\frac{1}{h} - \frac{1}{g}$ attire notre regard et se révèle valoir $\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$. On conclut comme aux questions précédentes.

Corrections

1

Exercice 1-1

$$u \mid \sqrt[3]{y}$$

Exercice 1-3

On suppose

$$x-y=2.$$

Par l'exercice 1-2

$$a^3 - b^3 = x^3 - (-y)^3$$

$$(x-y)$$

$$c=0$$

on a

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 = 1.$$

$\Rightarrow$

Donc

$$x^3 - y^3 - \underline{3x^2y} + 3xy^2 + \underline{3xy^2} = 1.$$

$$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2 (-x+y+1) = 1$$

Par conséquent

$$x^3 - y^3 - 3xy^2 = 1.$$

Exercices 1-7

2

$$2) \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) \right)$$

$$= \sum_{j=0}^n \text{Max}(0, j) + \dots + \sum_{j=0}^n \text{Max}(i-1, j) + \sum_{j=0}^n \text{Max}(i, j) + \sum_{j=0}^n \text{Max}(i+1, j) + \dots + \sum_{j=0}^n \text{Max}(n, j)$$

$$= [1 + \dots + n] + \dots + [(i-1)i + i + (i+2) + \dots + n] + [i(i+1) + i+1 + \dots + n] + [(i+1)(i+2) + \dots + n] + \dots + n(n+1)$$

$$= 1 + 1(2) + \underbrace{(i + i + \dots + i + i(i+1))}_{i \text{ fois}} + \dots + \underbrace{[n + \dots + n + n(n+1)]}_{n \text{ fois}}$$

$$= 1 + 1(2) + (2i^2 + i) + \dots + (2n^2 + n)$$

$$= \sum_{i=0}^n (2i^2 + i)$$

Exercice 1-9

1) Montrons que $B < A$.

Il suffit de montrer que $A - B > 0$

En effet

$$\frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3} - \left[\frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4} \right] = \frac{4a^4 - 28a^2 + 16 - 3a^4 + 27a^2 - 15}{12} = \frac{a^4 - a^2 + 1}{12}$$

Si $0 < |a| < 1$

$$\text{alors } 1 - a^2 > 0 \Rightarrow 1 - a^2 + a^4 > 0$$

$$\text{Si } |a| = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a^4 - a^2 + 1 = 1 > 0$$

$$\text{Si } |a| = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow a^4 - a^2 + 1 = 1 > 0$$

$$\text{Si } |a| > 2 \Rightarrow a^4 - a^2 > 0 \Rightarrow a^4 - a^2 + 1 > 0. \quad \boxed{3}$$

Par conséquent pour tout $a \in \mathbb{R}$ $A - B = \frac{1}{12} (a^4 - a^2 + 1) > 0.$

d'où $A > B.$

Ex 1-8

2) $x^2 - 4x - 2 \geq 0.$

les racines du polynôme $x^2 - 4x - 2$ sont données par l'expression

$$\Delta = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{2^2(6)}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{6}$$

$$(x^2 - 4x - 2) = (x - 2 - \sqrt{6})(x - 2 + \sqrt{6})$$

Alors montrer que $x^2 - 4x - 2 \geq 0$ revient à dire que

$$(x - 2 - \sqrt{6})(x - 2 + \sqrt{6}) \geq 0$$

que pour la loi de signes est équivalent à dire

$$x \geq 2 + \sqrt{6} \text{ et } x \leq 2 - \sqrt{6} \quad \text{ce qui donne l'intervalle } [2 + \sqrt{6}, +\infty[$$

ou

$$x \leq 2 + \sqrt{6} \text{ et } x \leq 2 - \sqrt{6} \quad]-\infty, 2 - \sqrt{6}]$$

En déduisant que pour tout $x \in]-\infty, 2 - \sqrt{6}] \cup [2 + \sqrt{6}, +\infty[$

$$x^2 - 4x - 2 \geq 0.$$

Exercice 106

41

1) Soit $k \in \{0, \dots, n-2\}$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1}}{\binom{n}{k} a^{n-k} b^k} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} a^{n-k-1} b^{k+1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k} = \frac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!} \frac{b}{a} = \frac{n-k}{k+1} \frac{b}{a}$$

2) De 1) on obtient que $\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 \iff \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{b}{a} = 1$

$$\iff (n-k) \frac{b}{a} = k+1$$

$$\iff n \frac{b}{a} - 1 = k+1$$

$$\iff \frac{nb-a}{a+b} = k$$

Et pour $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \iff k < \frac{nb-a}{a+b}$ on fait de même argument.

3) Supposons $n < \frac{b}{a}$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-2\}$

~~comme $a < b$ alors $nb-a > 0$~~

Montrons que $\frac{nb-a}{a+b} > n-2$ ce qui équivaut à dire que

$$nb-a > (n-1)(a+b) \iff nb-a > na + b - a$$

$$\iff b > na$$

$$\iff \frac{b}{a} > n$$

D'après 2) $1 < \frac{u_{i+1}}{u_i} \iff i < \frac{nb-a}{a+b}$, mais on a déjà montré que $n-2 < \frac{nb-a}{a+b}$ et $i \leq n-2$ alors $i < \frac{nb-a}{a+b}$

4) Si $n = \frac{b}{a}$ alors

$$\begin{aligned} \frac{nb-a}{b+a} &= \frac{1}{b+a} \left(\frac{b}{a} - a \right) = \frac{b^2 - a^2}{a(b+a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{a(b+a)} \\ &= \frac{b-a}{a} \\ &= \frac{b}{a} - 1 \\ &= n-1. \end{aligned}$$

Si $i < n-1$ alors ~~$i < \frac{nb-a}{b+a}$~~ $i < \frac{nb-a}{b+a}$ que par 2)
revient à dire que $1 < \frac{u_{i+1}}{u_i}$.

Si $i = n-1$ alors $n-1 = \frac{nb-a}{b+a}$ que par 2) est équivalent
à l'expression $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$

5) D'après 3 $n < \frac{b}{a} \Leftrightarrow (n-1) < \frac{nb-a}{b+a}$

$$\text{alors} \quad \frac{b}{a} \leq n \Leftrightarrow \frac{nb-a}{b+a} \leq n-1.$$

Ce cas $n = \frac{b}{a}$ a été déjà fait dans 4). et de plus

$$n = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{nb-a}{b+a} = n-1.$$

Alors

$$\frac{b}{a} < n \Leftrightarrow \frac{nb-a}{b+a} < n-1. \quad (\text{Notons que } \frac{nb-a}{b+a} > 0)$$

Soit $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tel que $i \leq \frac{nb-a}{b+a} < i+1$.

- Si $i < \frac{nb-a}{b+a}$ alors pour tout $k \leq i$ $u_k < u_{k+1}$
- Si $i = \frac{nb-a}{b+a}$ alors pour tout $k < i$ $u_k < u_{k+1}$ et $u_i = u_{i+1}$.

- Finalement pour tout $k > i$ $u_{k+1} < u_k$, puisque $u_{k+1} < u_n$, puis que $u_{k+1} < u_n \Leftrightarrow \frac{nb-1}{b+a} < k$.

Amer la liste l_{n-1}, u_1 se comporte de la manière suivante:

$$\text{Soit } i \neq q \quad i \leq \frac{n-1}{2} < i+2.$$

Alors pour tout $k \leq i$ $u_0 < u_1 < \dots < u_i \leq u_{i+2}$
 et pour toute $k > i$ $u_n < u_{n-1} < \dots < u_{i+2}$.