

## Feuille 10. Dérivabilité

**Exercice 10-1** Pour chacune des fonctions  $f$  définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée  $f'$  :

- |                                  |                                      |  |                                |
|----------------------------------|--------------------------------------|--|--------------------------------|
| 1) $x^4 + 3x^2 - 6$              | 2) $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$        | 3) $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}$ | 4) $x(x+3)e^x$                 |
| 5) $\frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$ | 6) $\frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}}$ | 7) $\frac{\ln x}{x^3}$                     | 8) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ |
| 9) $\sqrt[3]{x^2 + x + 1}$       | 10) $\sin(\cos(3x))$                 | 11) $\ln(\sin^2 x)$                        | 12) $e^{-x^2}$                 |
| 13) $(1-x)^{7/3}$                | 14) $\ln( 2x )$                      | 15) $\ln( e^{2\pi ix} )$                   | 16) $2^{\ln x}$                |

**Réponse :**

1.  $4x^3 + 6x$
2.  $21x^{5/2} + 10x^{3/2} - 2$
3.  $\frac{3}{2\sqrt{3x}} + \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{x^2}$
4.  $(x^2 + 5x + 3)e^x$
5.  $\frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2}$
6.  $\frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})^2}$
7.  $\frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$
8.  $\frac{1}{1 + \cos x}$
9.  $1/3(x^2 + x + 1)^{-2/3}(2x + 1)$
10.  $-3 \cos(\cos(3x)) \sin(3x)$
11.  $\frac{2 \cos x}{\sin x}$
12.  $-2xe^{-x^2}$
13.  $-7/3(1-x)^{4/3}$
14.  $1/|x|$
15.  $e^{2\pi ix} 2i\pi$
16.  $\frac{1}{x} \ln(2) 2^{\ln x}$

**Exercice 10-2** Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad (1)$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Réponse :** La fonction est continue est dérivable sur  $]0, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ . Le seul problème  $x = 1$ . Pour que  $f$  soit continue sur  $x = 1$  on doit avoir  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ . Donc on a  $1 = a + b + 1$ .

Pour que  $f$  soit dérivable sur  $x = 1$ , on doit avoir  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ . Donc on a  $\frac{1}{2} = ax|_{x=1}$ . Afin que  $f$  soit dérivable, il faut et il suffit que les dérivées à droite et à gauche existent et soient égales. Conclusion :  $f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  si et seulement si  $a + b = 1$  et  $a = \frac{1}{2}$ . Donc,  $a = \frac{1}{2}$  et  $b = -\frac{1}{2}$ .

### Exercice 10-3

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0, \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

2. Même question avec :  $f(x) = \sqrt{|x|}$ .

**Réponse :** (1) La fonction est continue en dehors de 0 et 1 parce que chaque point  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$  appartient à un intervalle ouvert sur lequel  $f$  est définie de manière unique et par une fonction continue, en l'occurrence par  $e^x - x$  ou  $\cos^2(\pi x)$  ou  $1 + \frac{\ln x}{x}$ . Elle est continue à droite en 0 et à gauche en 1 parce que la définition de la fonction en ces points est donnée par  $\cos^2(\pi x)$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - x = 1 = f(0)$ , elle est aussi continue à gauche en 0 et comme  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1 = f(1)$  elle est aussi continue à droite en 1. Elle est donc partout continue.

Pour  $x < 0$ ,  $f$  est dérivable de dérivée  $f'(x) = e^x - 1$ . Pour  $0 < x < 1$ ,  $f$  est dérivable de dérivée  $f'(x) = -2\pi \cos(\pi x) \sin(\pi x)$ . Pour  $x > 1$ ,  $f$  est dérivable de dérivée  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

En 0,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{2x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(\pi x)^2(\cos(\pi x) + 1)}{2x} = 0$ . La fonction  $f$  est donc dérivable en 0 de dérivée  $f'(0) = 0$ .

Ensuite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos^2(\pi y) - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-(\pi y)^2(\cos(\pi y) + 1)}{2y} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x(x - 1)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(y + 1)}{y(y + 1)} = 1$ . Donc  $f$  admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en 1 mais n'est pas dérivable.

(2) La fonction  $f$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$  puisqu'elle est la composée de deux fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , en l'occurrence  $\sqrt{\cdot}$  et  $|\cdot|$ .

Elle est dérivable en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  car chaque réel non nul appartient à un intervalle ouvert sur lequel  $f$  est définie par  $x \mapsto \sqrt{x}$  pour  $x > 0$  et  $x \mapsto \sqrt{-x}$  pour  $x < 0$ .

En 0,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{-x} = -\infty$ , tandis que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$ . Par conséquent,  $f$  n'est pas dérivable en 0; elle ne l'est pas à gauche ni à droite non plus.

**Exercice 10-4** Préciser pour chacune des fonctions suivantes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1.  $f(x) = \cos(\cos x)$ .
2.  $g(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ .
3.  $h(x) = \sqrt{|\sin x|}$ .

**Réponse :**

1. La fonction  $\cos$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $f(x)$  est aussi dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée  $f'(x) = \sin(\cos x) \sin(x)$ .
2. La fonction  $g$  est périodique de période  $2\pi$ . En dehors de  $\pi$ ,  $g$  est dérivable de dérivée  $g'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}}$ .

Pour les valeurs supérieures en  $\pi$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos y}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{|y|}{\sqrt{2}y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Ce

qui donne la valeur de la dérivée à droite. Par contre en  $\pi^-$  on obtiendra  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ , ce qui donne la valeur de la dérivée à gauche. Par conséquent,  $g$  n'est pas dérivable en  $\pi$ . Elle ne l'est qu'à gauche et à droite. Par périodicité, le même manque de dérivabilité existe en tout point de  $\mathbb{R}$  de la forme  $(2k+1)\pi$ .

3. La fonction  $h(x)$  est périodique de période  $\pi$ . Comme  $\sin$  est partout dérivable, que  $|\cdot|$  est dérivable en dehors de 0, et que  $\sqrt{\cdot}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $h(x)$  est dérivable sur  $]0, \pi[$  de dérivée  $h'(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x}$ .

Par contre en 0,  $h$  n'est ni dérivable à droite, ni à gauche, car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$  n'est pas finie. Un raisonnement symétrique donne la même conclusion en  $0^-$ . Ce raisonnement s'étend sur  $\mathbb{R}$  par périodicité et  $h$  n'est pas dérivable en  $k\pi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Exercice 10-5** Soit  $f$  la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ \sin x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que  $f$  est dérivable en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^*$  en calculant sa dérivée.
2.  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
3.  $f'$  est-elle continue en 0 ?
4.  $f$  est-elle deux fois dérivable en 0 ?

**Réponse :**

1. Tout d'abord,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  parce que chaque point de cet ensemble appartient à un intervalle ouvert sur lequel  $f$  est uniquement définie comme composition de fonctions simples, continues sur cet intervalle. Ensuite, comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \exp(-1/x^2) = 0 = f(0)$  elle est aussi continue en 0.

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $f'(x) = 1 + 2/x^3 \exp(-1/x^2)$ , et aussi sur  $\mathbb{R}_-^*$  de dérivée  $f'(x) = \cos x$ .

2. On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 1/x \exp(-1/x^2) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ .  
Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$ .

3. Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + 2/x^3 \exp(-1/x^2) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$ ,  $f'$  est continue en 0, et donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

4. On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2/x^4 \exp(-1/x^2) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ , d'où  $f$  est deux fois dérivable en 0, et  $f''(0) = 0$ .

**Exercice 10-6** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On définit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $f_n$  est-elle continue ?
2. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f_n$  dérivable ?
3. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f'_n$  continue ?
4. Pour quelles valeurs de  $n$ , est-elle  $f'_n$  dérivable ?

**Réponse :**

1. Comme  $\sin$  est une fonction bornée, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$  si  $n \neq 0$ . Par contre  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  n'existe pas. Vérifions-le en utilisant deux suites de nombres strictement positifs  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}^*) ; \quad b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Quand on pose  $x = a_n$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(1/a_n) = 0$ ; en fait,  $f(a_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par contre,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(1/b_n)$  n'existe pas. En effet,  $f(b_n) = 1$  si  $n$  est pair et  $f(b_n) = -1$  si  $n$  est impair. Ainsi  $f_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  pour  $n \geq 1$ .

2. En dehors de 0,  $f_n$  est dérivable, de dérivée  $f'_n(x) = nx^{n-1} \sin(1/x) - x^{n-2} \cos(1/x)$ . En 0 on a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin(1/x)$ . Ainsi  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si  $n \geq 2$ , auquel cas  $f'_n(0) = 0$ .
3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} f'_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} nx^{n-1} \sin(1/x) - x^{n-2} \cos(1/x) = 0$  seulement si  $n \geq 3$ , car quand  $n = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$  n'existe pas, une conclusion à laquelle on peut aboutir par la même méthode que la non existence de la limite de  $\sin(1/x)$  en 0. Donc  $f'_n$  est continue, uniquement si  $n \geq 3$ .
4.  $f'_n$  est dérivable en dehors de 0. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_n(x) - f'_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} nx^{n-2} \sin(1/x) - x^{n-3} \cos(1/x)$  et donc  $f'_n$  est dérivable en 0 si et seulement si  $n \geq 4$ .

**Exercice 10-7** Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1.  $|\sin x| \leq |x|$  pour  $x \geq 0$ ;
2.  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x \geq 0$ .

**Réponse :**

1. On considère  $f(x) = \sin x$  sur  $[0, x]$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[0, x]$  et dérivable sur  $]0, x[$ , par le théorème des accroissements finis il existe  $c \in ]0, x[$  telle que  $f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ . Donc,  $|\cos(c)(x - 0)| = |\sin x|$ . Puisque  $|\cos c| \leq 1$  on a  $|\sin x| \leq |x|$ .
2. Cette fois si on considère  $f(x) = \ln(1+x)$  sur  $[0, x]$ ,  $x \geq 0$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[0, x]$  et dérivable sur  $]0, x[$ , par le théorème des accroissements finis il existe  $c \in ]0, x[$  telle que  $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x - 0} = \frac{1}{1+c}$ . Donc  $\ln(1+x) = \frac{x}{1+c} \leq x$ .

**Exercice 10-8**

1. Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$  avec  $0 \leq a < b$  :

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$

2. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

**Réponse :**

1. La fonction  $\arctan$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Le théorème des accroissements finis montre alors qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\arctan b - \arctan a = \arctan' c(b - a) \quad .$$

Comme  $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  on a  $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$  d'où le résultat.

2. Il suffit d'écrire l'encadrement précédent pour  $a = 1$  et  $b = 4/3$ .

**Exercice 10-9**

1. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  :  $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$ .
2. Montrer que pour tous réels  $x$  et  $y$  tels que  $x \neq y$  :  $|\cos y - \cos x| < |y - x|$ .

**Réponse :**

1. La fonction  $\cos x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, si  $x \neq y$ , disons  $x < y$  sans perte de généralité, le théorème des accroissements finis nous montre qu'il existe  $c \in ]x, y[$  tel que

$$\cos(x) - \cos(y) = \cos'(c)(x - y) = (-\sin(c))(x - y) \quad .$$

En valeur absolue, on obtient

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\cos'(c)||x - y| \leq |x - y| \quad .$$

parce que  $-1 \leq \sin(c) \leq 1$ . Si  $x = y$ , bien sûr l'inégalité large reste vraie.

2. On essaye d'affiner l'inégalité du premier point. Sans perte de généralité, on supposera  $x < y$ . Il y a deux cas à considérer. Dans le premier il n'existe pas de  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x < \frac{\pi}{2} + k\pi < y$ . Sous cette hypothèse, pour tout  $c \in ]x, y[$ ,  $|\cos(c)| < 1$ . Par conséquent, l'inégalité qui découle du théorème des accroissements finis devient

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\cos'(c)||x - y| < |x - y| \quad .$$

Mettons-nous maintenant dans le cas contraire. On considère le plus petit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x < \frac{\pi}{2} + k\pi < y$ . Alors,

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= |\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) + \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) - \cos(y)| \\ &\leq |\cos(x) - 0| + |0 - \cos(y)| \\ &\leq |\cos'(c_1)||x - (\frac{\pi}{2} + k\pi)| + |\cos'(c_2)||\frac{\pi}{2} + k\pi - y|. \end{aligned}$$

où  $c_1 \in ]x, \frac{\pi}{2} + k\pi[$  et  $c_2 \in ]\frac{\pi}{2} + k\pi, y[$  proviennent du théorème des accroissements finis. Comme il n'existe pas d'élément de  $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$  dans l'intervalle  $]x, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , on a  $|\cos'(c_1)| < 1$ . Ainsi

$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &< |x - (\frac{\pi}{2} + k\pi)| + |(\frac{\pi}{2} + k\pi) - y| \\ &= \frac{\pi}{2} + k\pi - x + y - \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) \\ &= y - x \\ &= |x - y|. \end{aligned}$$

**Exercice 10-10** Soit  $f$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$  et que  $f(1) = 0$ . Montrer que  $f'''$  s'annule sur l'intervalle  $]0, 1[$ .
2. On suppose ici que  $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$ . Montrer le même résultat. Généralisez à une fonction  $k$  fois dérivable ayant  $n$  zéros, pour tous entiers  $k < n$ .
3. On suppose ici que  $f(0) = f'(0) = 0$  et que  $f(1) = f'(1) = 0$ . Montrer le même résultat.

**Réponse :** C'est une suite d'applications du théorème de Rolle. L'existence de  $\alpha$  et  $\beta$  est justifiée par ce théorème.

1. Comme  $f(0) = f(1) = 0$  il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ . Alors comme  $f'(0) = f'(\alpha) = 0$  il existe  $\beta \in ]0, \alpha[$  tel que  $f''(\beta) = 0$ , et finalement, comme  $f''(0) = f''(\beta) = 0$  il existe  $\gamma \in ]0, \beta[ \subset ]0, 1[$  tel que  $f'''(\gamma) = 0$ .
2. Pour  $f'$  on a trois racines distinctes, une entre 0 et  $1/3$ , une entre  $1/3$  et  $2/3$  et une entre  $2/3$  et 1, donc 2 racines distinctes pour  $f''$  et finalement 1 pour  $f'''$ .  
On montre la généralisation par récurrence sur  $k < n$ , pour  $n$  fixé. Soit  $g$  une fonction ayant  $n$  zéros. On considère le prédicat  $P(k)$  : si  $g$  est  $k$  fois dérivable, alors  $g^{(k)}$  a au moins  $n - k$  zéros.  
**Initialisation :**  $P(0)$  est évidemment vrai.  
**Hérédité :** Soit  $0 < k < n$ . On suppose  $P(k - 1)$  vrai. Montrons que  $P(k)$  l'est. Si  $g$  est  $k$  fois dérivable, elle est  $k - 1$  fois dérivable, et par hypothèse de récurrence  $g^{(k-1)}$  a au moins  $n - k + 1$  zéros. On applique le théorème de Rolle à cette fonction, et on obtient bien que  $g^{(k)}$  admet au moins  $n - k$  zéros.  
**Conclusion :**  $P(0)$  est vrai et la propriété est héréditaire donc pour tout  $k < n$ , si  $g$  est  $k$  fois dérivable,  $g^{(k)}$  admet au moins  $n - k$  zéros.
3.  $f(0) = f(1) = 0$  nous donne une troisième racine pour  $f'$ , on conclut comme ci dessus.

**Exercice 10-11** On considère  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré  $n \in \mathbb{N}$ , c'est à dire qu'il existe des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tels que  $a_n \neq 0$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Montrer qu'il existe au plus  $n$  solutions réelles à l'équation  $P(x) = 0$ .

**Solution :**

On utilise la généralisation du 2) de l'exercice précédent : Si  $P$  avait strictement plus que  $n$  racines, alors sa dérivée  $n$ -ème, qui est une constante non nulle, aurait au moins un zéro, ce qui est absurde.

*Remarque :* On peut le montrer directement par récurrence : pour  $n \geq 1$  entier, notons  $\mathcal{P}(n)$  la proposition suivante :

Pour tout polynôme réel  $P$  de degré  $n$ , il existe au plus  $n$  nombres réels distincts  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  tels que, pour tout  $1 \leq k \leq n$ ,  $P(x_k) = 0$ .

**Initialisation :** Une fonction affine a au plus un zéro.

**Hérédité :** On considère un entier  $n \geq 2$  tel que  $\mathcal{P}(n - 1)$  soit vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n)$  est également vraie.

On effectue un raisonnement par l'absurde. Supposons que  $P$  soit une fonction polynomiale de degré  $n$ , et supposons qu'il existe  $n + 1$  solutions distinctes  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$  de l'équation  $P(x) = 0$ . Alors

$$0 = P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n) = P(x_{n+1}).$$

Le théorème de Rolle appliqué à la fonction  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$  (qui est dérivable en chaque point de  $\mathbb{R}$ ) sur les intervalles  $I_1, I_2, \dots, I_n$  définis par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad I_k = ]x_k, x_{k+1}[$$

fournit  $n$  nombres réels  $y_1 \in I_1, y_2 \in I_2, \dots, y_n \in I_n$  tels que

$$0 = P'(y_1) = P'(y_2) = \dots = P'(y_n).$$

Cependant, la fonction  $P'$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $P'$  montre que nécessairement  $P' = 0$ . On en déduit que  $P$  est un polynôme constant, ce qui est une contradiction.

**Exercice 10-12** Montrer que  $100 + \frac{1}{200}$  est une approximation par excès de  $\sqrt{10001}$ , et que l'erreur d'approximation est inférieure à  $\frac{1}{4 \cdot 10^6}$ .

**Réponse :** On applique le théorème des accroissements finis à  $f(x) = \sqrt{x}$ , de dérivée  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . En effet, d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]10000, 10001[$  tel que  $\sqrt{10001} - \sqrt{10000} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$ . Comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$  est décroissante,  $\frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200}$ . Par conséquent,  $\sqrt{10001} = 100 + \frac{1}{2\sqrt{c}} < 100 + \frac{1}{200}$ . La valeur absolue de la différence entre la valeur exacte et l'approximation est

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{c}} - \frac{1}{200} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{c} - 100}{100\sqrt{c}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{c - 10^4}{100\sqrt{c}(\sqrt{c} + 100)} \right| < \frac{1}{4 \cdot 10^6}.$$

**Exercice 10-13** Montrer que pour tout entier  $k \geq 1$  :  $\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ . En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ , on a  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq 1 + \ln(n)$ .

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$  où  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

**Réponse :** La fonction  $\ln$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $x \mapsto 1/x$ , qui est une fonction décroissante. Le théorème des accroissements finis montre alors que pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ . Les sommes télescopiques impliquent  $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln k \leq H_n$ , et

$H_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln k = 1 + \ln(n)$  d'où le résultat. Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty$ , on conclut que  $H_n$  diverge aussi.

**Exercice 10-14**

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour  $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$

2. On suppose maintenant  $\alpha > 1$ . Pour  $k \geq 2$ , comparer  $\frac{\alpha - 1}{k^\alpha}$  et  $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}$ .

3. Toujours pour  $\alpha > 1$ , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

### Réponse :

1. Si  $\alpha \leq 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$ .

2. La fonction  $f(x) = 1/x^{\alpha-1}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $-\frac{\alpha-1}{x^\alpha}$ . Par le théorème des accroissements finis, appliqué sur l'intervalle  $[k-1, k]$ ,  $\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} = f(k-1) - f(k) = |f(k-1) - f(k)| > \frac{\alpha-1}{k^\alpha}$ .

3. On a donc par les sommes télescopiques,  $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha-1}{k^\alpha} = \alpha-1 + \sum_{k=2}^n \frac{\alpha-1}{k^\alpha} < 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \alpha-1$ .

A la limite, on obtient  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha-1}{k^\alpha} < \alpha$ . Ceci équivaut à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} < \frac{\alpha}{\alpha-1}$ .

### Exercice 10-15

Soit  $n \geq 1$  un nombre entier et  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Montrer que l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$$

a au moins une solution  $x$  dans l'intervalle  $]0, 1[$ .

### Solution :

On considère les deux fonctions polynomiales  $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ Q(x) &= \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

On commence par remarquer que  $Q' = P$  (la fonction  $Q$  est polynomiale, donc dérivable). Ensuite, l'hypothèse de l'énoncé assure que

$$0 = Q(0) = Q(1).$$

Puisque  $Q$  est dérivable, le théorème de Rolle assure donc l'existence de  $x \in ]0, 1[$  tel que  $Q'(x) = 0 = P(x)$ , soit encore,

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0.$$

### Exercice 10-16

On considère deux fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f$  soit deux fois dérivable et  $g$  continue.

1. Soit  $c \in \mathbb{R}$  un maximum local de  $f$ . Montrer que  $f''(c) \leq 0$ .
2. De même, si  $c \in \mathbb{R}$  est un minimum local de  $f$ , montrer que  $f''(c) \geq 0$ .
3. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + g(x)f'(x) - f(x) = 0.$$

. On suppose de plus qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et  $f(a) = f(b) = 0$ . Montrer que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

### Solution :

1. On raisonne par l'absurde : supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que  $f''(c) > 0$ , c'est à dire que

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(c+h)}{h} > 0.$$

En effet,  $f'(c) = 0$  puisque  $c$  est un extremum (local) de  $f$ . On en déduit que  $f'(c+h)h^{-1}$  est positif pour  $h \neq 0$  assez petit : il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\begin{aligned} f'(c+h) &> 0 && \text{pour } h \in ]0, \delta[ \\ f'(c+h) &< 0 && \text{pour } h \in ]-\delta, 0[. \end{aligned}$$

En particulier,  $h \mapsto f(c+h)$  est décroissante sur  $] -\delta, 0[$  et croissante sur  $]0, \delta[$ . La fonction  $f$  admet donc un minimum local en  $c$ . Mais comme  $c$  est aussi un maximum local, cela signifie que  $f$  est constante sur un petit intervalle  $I = ]c - \eta, c + \eta[$  contenant  $a$  (avec  $\eta > 0$ ). On en déduit que  $f''(c) = 0$ , ce qui est une contradiction.

2. En posant  $F = -f$  et en utilisant la question précédente à  $F$ , on montre que  $f''(c) \geq 0$ .
3. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que  $f$  ne soit pas constamment nulle sur  $[a, b]$ . Comme  $f$  est continue, elle admet un maximum  $c$  et un minimum  $c'$  sur le segment  $[a, b]$ , c'est à dire que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(c') \leq f(x) \leq f(c).$$

En particulier,  $f(c') \leq 0 = f(a) = f(b) \leq f(c)$ . Comme nous avons supposé que  $f$  est non identiquement nulle sur  $[a, b]$ , nécessairement  $f(c') < 0$  ou  $f(c) > 0$ .

Plaçons-nous d'abord dans le cas où  $f(c) > 0$ . En évaluant l'équation vérifiée par  $f$  en  $c$  on trouve

$$f''(c) + g(c)f'(c) - f(c) = 0.$$

Mais comme  $c$  est un maximum (global) de  $f$  (sur  $[a, b]$ ), on a d'une part  $f'(c) = 0$ , et d'autre part  $f''(c) \leq 0$  grâce à la question 1. La relation précédente devient

$$0 < f(c) = f''(c) + g(c)f'(c) = f''(c) \leq 0,$$

ce qui est une contradiction. Dans le cas où  $f(c') < 0$ , on montre de manière symétrique que

$$0 \leq f''(c') = f''(c') + f'(c')g(c') = f(c') < 0,$$

ce qui est aussi une contradiction.

**Exercice 10-101** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. Calculer  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x - a}$ , pour un  $a \in \mathbb{R}$ .

**Réponse :** On a  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - x f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a f(x) - a f(a) + a f(a) - x f(a)}{x - a} = a f'(a) - f(a)$ .

**Exercice 10-102** Montrer que la fonction  $P$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) a au plus 4 racines réelles.

**Réponse :** La dérivée seconde de  $P$  est  $9900x^{98} + 42ax^5$ . Ce polynôme a au plus deux racines réelles, 0 et  $\sqrt[3]{\frac{-42a}{9900}}$ . Par conséquent,  $P$  a au plus deux points d'inflexion. Ceci implique que  $P$  ait au plus 4 racines réelles.

**Exercice 10-103** On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(1+x^2) - \arctan x \end{aligned}$$

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$  où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  qui satisfait les identités
  - $P_1(x) = 2x - 1$ ,
  - $P_{n+1}(x) = (x^2 + 1)P'_n(x) - 2xP_n(x)$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $P_n$  a  $n$  racines distinctes.

**Réponse :**

- C'est un raisonnement par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- On se contente d'une indication. Pour  $n = 1$ , c'est clair. Pour  $n + 1$  on évalue  $P_{n+1}$  en les  $n$  racines supposées distinctes de  $P_n$  et étudie le changement de signe.

**Exercice 10-104** Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, dérivable sur  $]a, b[$ . Montrer que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ , en supposant que cette limite est finie.

**Réponse :** On calcule  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ . Pour chaque  $x \in ]a, b[$ , il existe  $c_x \in ]a, x[$  tel que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ . La conclusion s'ensuit en utilisant l'hypothèse que la limite  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  soit finie.

**Exercice 10-105** Soient  $a < b$  deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable  $f$  de  $[a, b[$  vers  $\mathbb{R}$  telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$  et la majoration  $|f'| \leq 1$  ?

**Réponse :** Non. En effet, pour tout  $a < b_0 < b$ , il existe  $c \in ]a, b_0[$  tel que  $f(b_0) - f(a) = f'(c)(b_0 - a)$ . En valeur absolue, on obtient  $|f(b_0) - f(a)| = |f'(c)|(b_0 - a) \leq |b_0 - a|$ . Par conséquent la valeur de  $f(b_0)$  est majorée par  $f(a) + |b_0 - a|$ . Ceci empêche que  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ .

**Exercice 10-106** Soit  $f$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$  une application continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

On suppose que  $f$  est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a  $f'(0) = f'(1) = 0$ .

- Montrer qu'il existe un  $\alpha$  dans  $]0, 1[$  tel que

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}.$$

En déduire que  $f(\alpha) = \alpha$ . [Indication : étudier la fonction  $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ .]

- On suppose de plus que  $f$  est deux fois dérivable sur  $[0, 1]$ . Montrer qu'il existe un  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tel que  $|f''(\beta)| \geq 4$ . [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions  $x \mapsto f(x) - 2x^2$  et  $x \mapsto 1 - f(x) - 2(1 - x)^2$ .]

**Réponse :** Suivez soigneusement les indications. Pensez à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

**Exercice 10-107** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x \ln x - x$ .

- En appliquant à  $f$  le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$

- En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$

3. En déduire que pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

**Réponse :**

1.  $f(x)$  est dérivable de dérivée  $\ln x$ , strictement croissante.
2. On fait la somme de 1 à  $n$  de ses inégalités pour obtenir le résultat.
3. On a donc  $f(n)+1 < \ln(n!) < f(n+1)+1$ , soit l'encadrement désiré en passant à l'exponentielle.