INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles
et modélisation

Contrôle Ecrit - EDOMO
16 Novembre 2010

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h00. Une seule feuille de cours est autorisée, aucun autre document ni calculatrice ne le seront durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Exercice 1 (10 minutes)(2.5 points)

1. (2 min) (0.5 point) Reconnaître l'équation différentielle suivante et donner les intervalles pour t et t_0 sur lesquels elle sera bien définie :

$$t\frac{dx}{dt} + x = t^2x^2 \text{ avec } x(t_0) = x_0.$$

2. (8 min) (2 points) On choisit $t_0 \in]0, +\infty[$ et $t \in]t_0, +\infty[$. Résoudre l'équation différentielle précédente, et exprimer la solution en fonction de t, t_0 et x_0.

Exercice 2. (30 minutes)(6 points)

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{x}{1+x} \; (E1) \text{ avec } x(t_0) = x_0 \text{ et } r \in I\!R.$$

1. (1 min) (1 point) Définir l'intervalle où les solutions existent.
2. (4 min) (1 point)Trouver les points d'équilibre x^* de l'équation différentielle $(E1)$ en fonction de r et les tracer sur le plan (r, x^*).
3. (10 min) (2 points) Considérons la fonction

$$f : (r, x) \mapsto f(r, x) = rx - \frac{x}{1+x}.$$

Montrer que $f(r, x)$ peut s'écrire sous la forme $f(r, x) = rx - 1 + \frac{a}{1+x}$, où a est une constante à déterminer. En déduire alors le nombre de points d'équilibre ainsi que leur nature (stable, instable, etc.) en fonction de r.

4. (15 min) (2 points) En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à ($E1$). Identifier le type de bifurcation et dessiner quelques chroniques “représentatives” illustrant la question précédente.

Exercice 3. (35 minutes)(5.5 points+2 points BONUS)

Considérons maintenant l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx - \frac{x}{1+x^2} \ (E2) \ \text{ avec } \ x(t_0) = x_0 \ \text{ et } \ r \in I\!R.$$

1. (1 min) (0.5 point) Définir l'intervalle où les solutions existent.
2. (4 min) (1 point) Trouver les points d'équilibre x^* de l'équation différentielle ($E2$) en fonction de r et les tracer sur le plan (r, x^*).
3. (10 min) (2 points) Chercher le nombre de points d'équilibre ainsi que leur nature (stable, instable, etc.) en fonction de r.
4. (15 min) (2 points) En vous servant des questions précédentes, dessiner le diagramme de bifurcation correspondant à ($E2$). Identifier le type de bifurcation et dessiner quelques chroniques “représentatives” illustrant la question précédente.
5. (5 min) (2 points) BONUS : en se servant des questions précédentes, donner le diagramme de bifurcation de l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = rx + \frac{x^3}{1+x^2} \ (E3) \ \text{ avec } \ x(t_0) = x_0 \ \text{ et } \ r \in I\!R.$$

   INDICATION : on pourra faire une transformation analogue à celle de la question 3. de l'exercice 2.

Exercice 4. (45 minutes (3x15 min))(6 points)

Pour chacun des trois systèmes d'equations différentielles suivants

$$A.\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 2x & + & 3y, \\ \dot{y} & = & 2x & + & y, \end{array}\right. \quad B.\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 3x & - & 18y, \\ \dot{y} & = & 2x & - & 9y, \end{array}\right. \quad C.\left\{\begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 2x & + & 8y, \\ \dot{y} & = & -1x & - & 2y, \end{array}\right.$$

trouver

1. (1 min) (0.25 point) l'équation caractéristique.
2. (4 min) (0.25 point) les valeurs propres.
3. (5 min) (1 point) les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
4. (5 min) (0.5 point) la forme de Jordan associée à la matrice de départ, en déduire la nature du point d'équilibre. Donner l'allure des trajectoires.

Contrôle écrit EDO du 16 novembre 2010 - CORRIGÉ

Ex 1. ① $t\frac{dx}{dt} + x = t^2x^2 \qquad x(t_0) = x_0$

On divise par t : pour cela on suppose que t appartient à un intervalle qui ne contient pas 0

Soit $t \in I \subset]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ ($t_0 \in I$ également)

on a alors :

$x'(t) + \frac{1}{t}x = t x^2$ ou encore $x' + \frac{1}{t}x - t^2x^2 = 0$ avec $x(t_0) = x_0$.

On reconnaît une équation de BERNOULLI de la forme

$x' + P(t)\,x + Q(t)\,x^2 = 0$ où $P(t) = \frac{1}{t} \quad Q(t) = -t$ et $r = 2$

② $t_0 \in]0, +\infty[$ et $t \in]t_0, +\infty[$

On pose $u = x^{1-r} = x^{1-2} = x^{-1}$ sous réserve que $t \in I := \{t > t_0$ et $x(t) \neq 0\}$

Alors u vérifie $\quad u' + (1-r)\,P(t)\,u + (1-r)\,Q(t) = 0$

Autrement dit $\quad u' - \frac{1}{t}u + t = 0$

ou encore $\quad u' - \frac{1}{t}u = -t$

On multiplie les 2 membres par $e^{-\ln t} = e^{\ln \frac{1}{t}} = \frac{1}{t}$ et on intègre entre t_0 et t

On obtient alors : $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{s}u(s)\right)' ds = -\int_{t_0}^{t} ds$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{t}u(t) - \frac{1}{t_0}u(t_0)\right] = -t + t_0$$

$$\Leftrightarrow \quad u(t) = t\left[\frac{u(t_0)}{t_0} + t_0\right] - t^2$$

or $u(t) = \frac{1}{x(t)}$ et donc

$$x(t) = \frac{x_0 t_0}{[1 + x_0 t_0^2]\,t - [x_0 t_0]\,t^2} = \frac{x_0 t_0}{t\,[(x_0 t_0)(t_0 - t) + 1]}$$

Ex② 1. Les solutions existeront pour des valeurs de t t.q. $x(t) \neq -1$.
Soit $t \in I$ où $I \subset$ intervalle qui satisfait cette condition

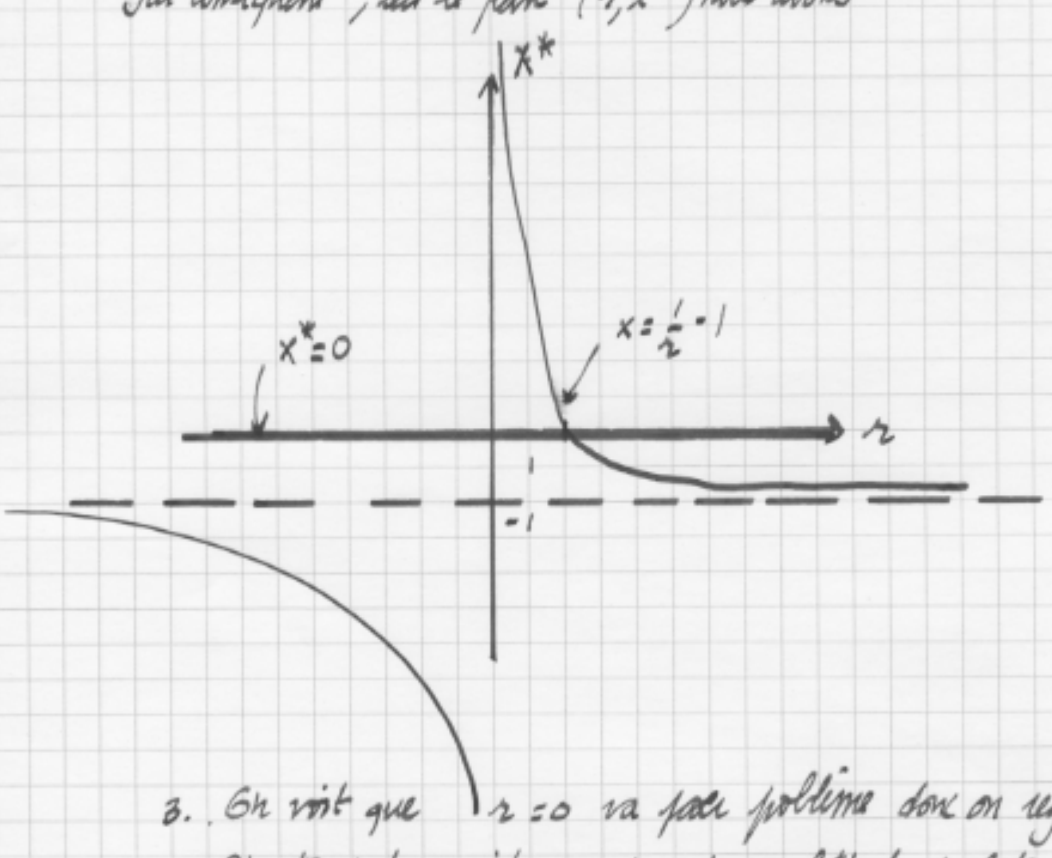
2. $\begin{cases} \dot{x} = rx - \dfrac{x}{1+x} & (E_1) \quad r \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Les points d'équilibre de (E_1) vérifient $rx^* - \dfrac{x^*}{1+x^*} = 0 \Leftrightarrow x^*\left(r - \dfrac{1}{1+x^*}\right) = 0$

c'est à dire $x^* = 0$ ou $r = \dfrac{1}{1+x^*}$

ou encore $x^* = 0$ ou $x^* = \dfrac{1}{r} - 1$, si $r \neq 0$

Par conséquent, sur le plan (r, x^*) nous avons



3. On voit que $r = 0$ va poser problème donc on regarde les cas $r<0$, $r=0$, $r>0$
. D'autre part, on voit que si $r=1$ on obtient 1 solution double.
Par conséquent, on regarde 5 cas différents

$r<0$ ① $\quad r=0$ ② $\quad 0<r<1$ ③ $\quad r=1$ ④ $\quad r>1$ ⑤

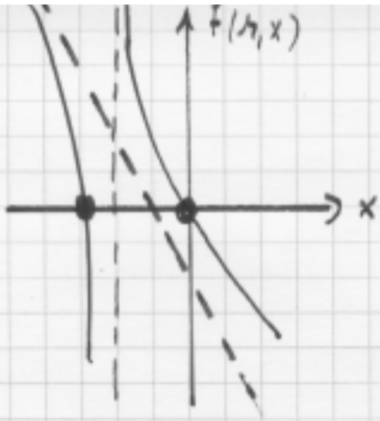
On pose $f(r,x) = rx - \dfrac{x}{1+x}$

On alors $f(r,x) = rx - \dfrac{1+x-1}{1+x} = (rx-1) + \dfrac{1}{1+x}$

On a donc 2 asymptotes à $x = -1$; asymptote verticale (indep. de r)

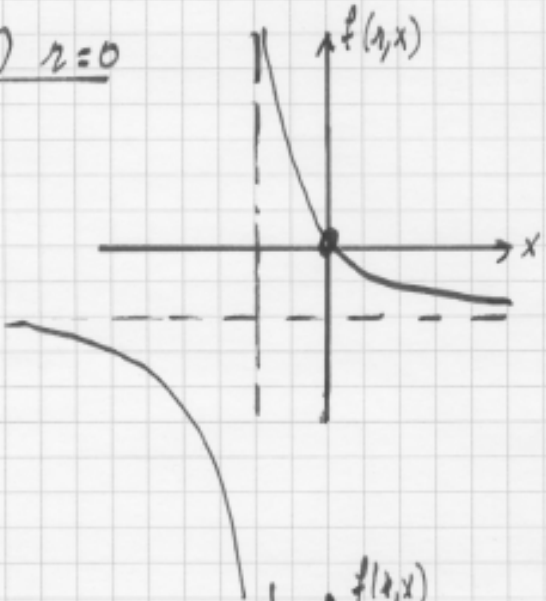
② à $x \to \infty$; droite $y = rx - 1$ (dependante de r)

cas ① $r<0$



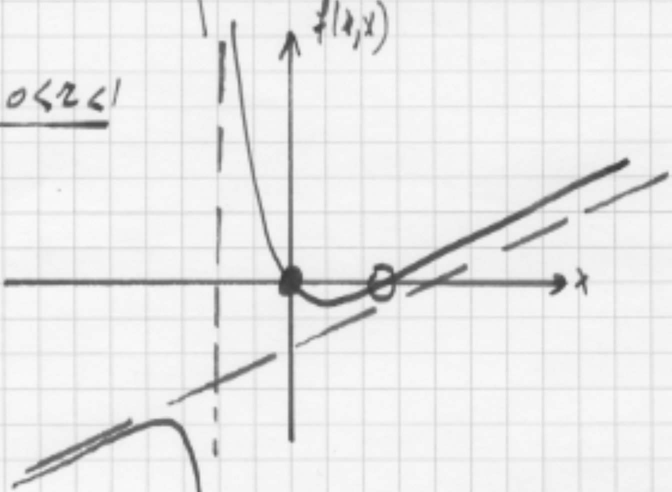
on a 2 points d'équilibres stables
$x^*=0$ et $x^*<0$ (et même $x^*<-1$)

cas ② $r=0$



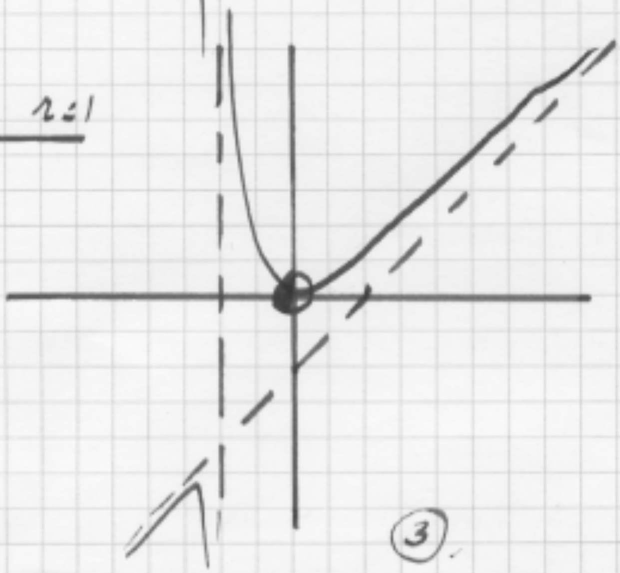
on a 1 seul point d'équilibre STABLE $x^*=0$

cas ③ $0<r<1$



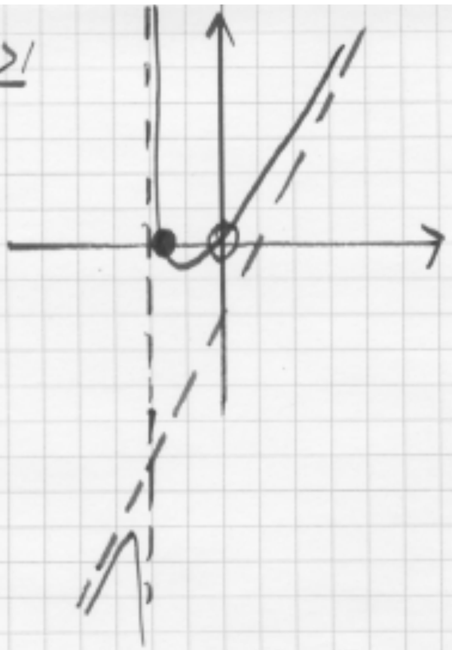
on a 2 points d'équilibre
$x^*=0$ stable
$x^*>1$ instable

cas ④ $r=1$



on a un seul point d'équilibre
$x^*=0$ shunt-positif.

cas 5 $\quad r>1$

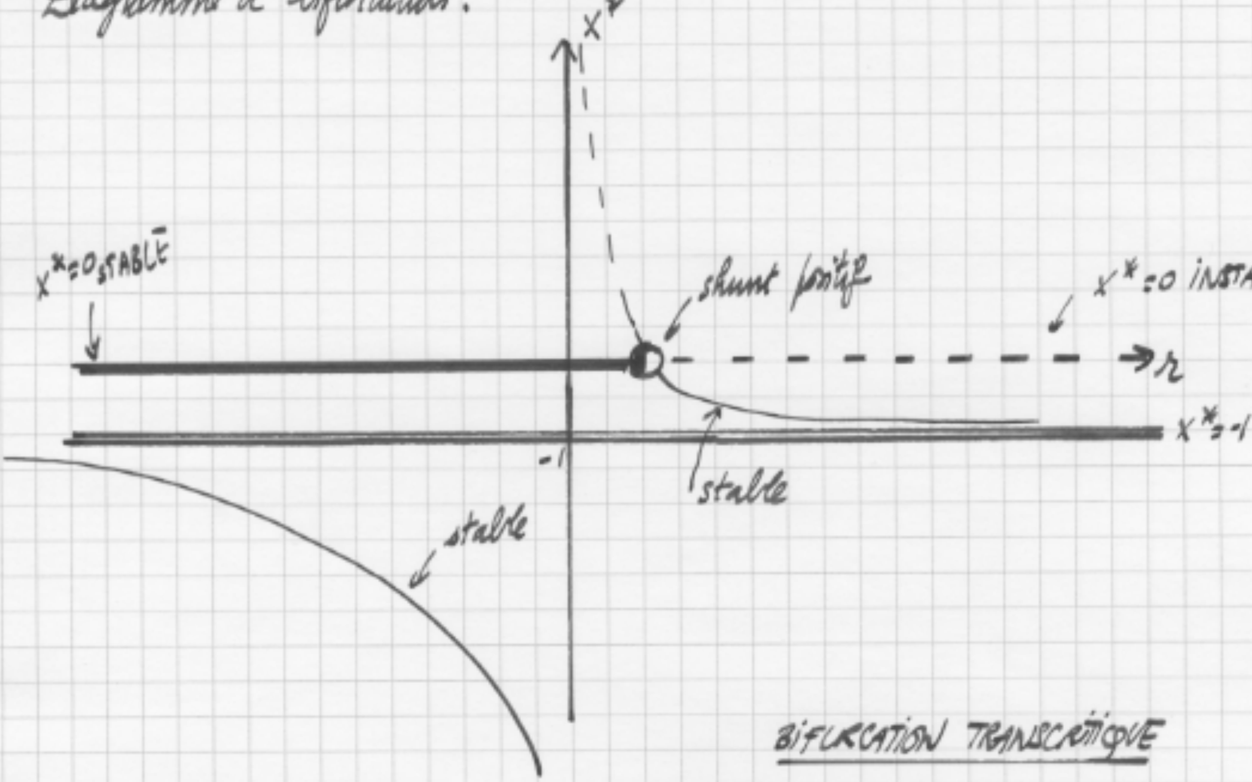


on a 2 points d'équilibre

$x^* = 0$ instable

$-1 < x^* < 0$ stable

Diagramme de bifurcation :



BIFURCATION TRANSCRITIQUE

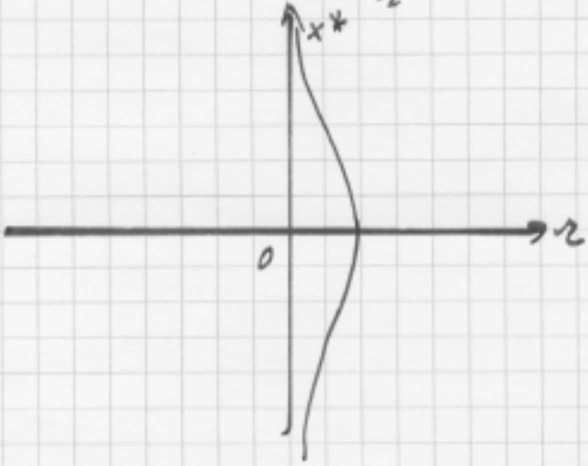
(le tracé des chroniques est laissé en exercice).

Ex ③ Si on pose maintenant $x' = rx - \frac{x}{1+x^2}$

1. $r \in \mathbb{R}$: pas de restriction

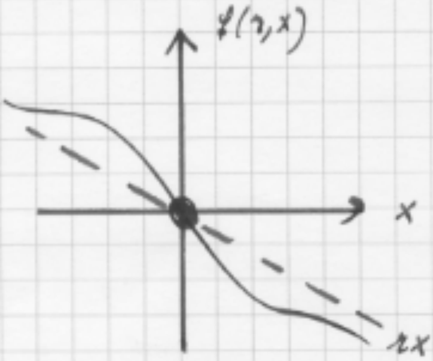
2. Les points d'équilibre vérifient $rx^* - \frac{x^*}{1+x^{*2}} = 0 \Leftrightarrow x^*\left(r - \frac{1}{1+x^{*2}}\right) = 0$

autrement dit $x^* = 0$ ou $x^{*2} = \frac{1}{r} - 1$ c'est à dire $x^* = \pm\sqrt{\frac{1}{r} - 1}$ $r \neq 0$



3. Plusieurs cas sont à prévoir $\underbrace{r<0 \quad r=0}_{①}$ $\quad \underset{②}{0<r<1} \quad \underset{③}{r=1} \quad \underset{④}{r>1}$

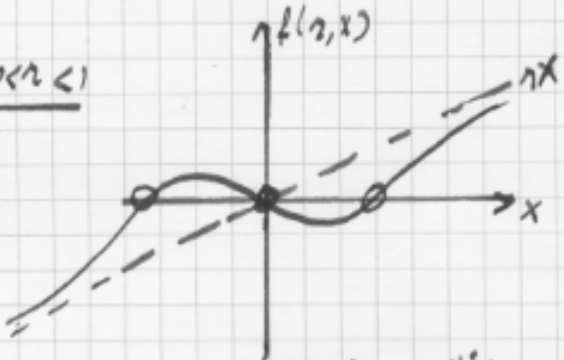
cas ① $r \leq 0$:



on pose $f(r,x) = rx - \frac{x}{1+x^2}$

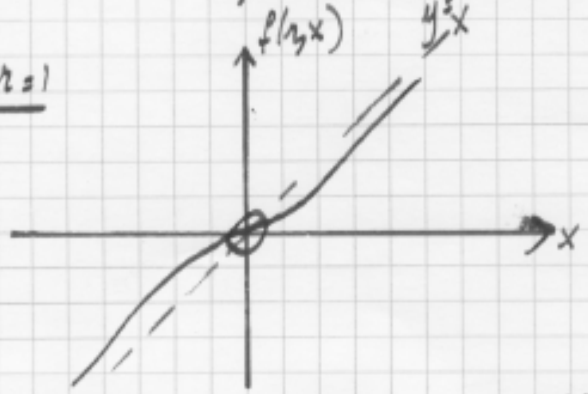
on a un seul point fixe $x^* = 0$ stable

cas ② $0<r<1$



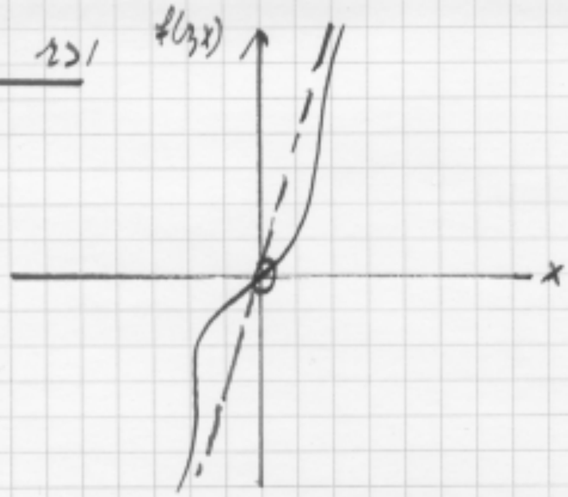
3 points fixes : $x^* = 0$ stable
2 instables à l'extérieur.

cas ③ $r = 1$



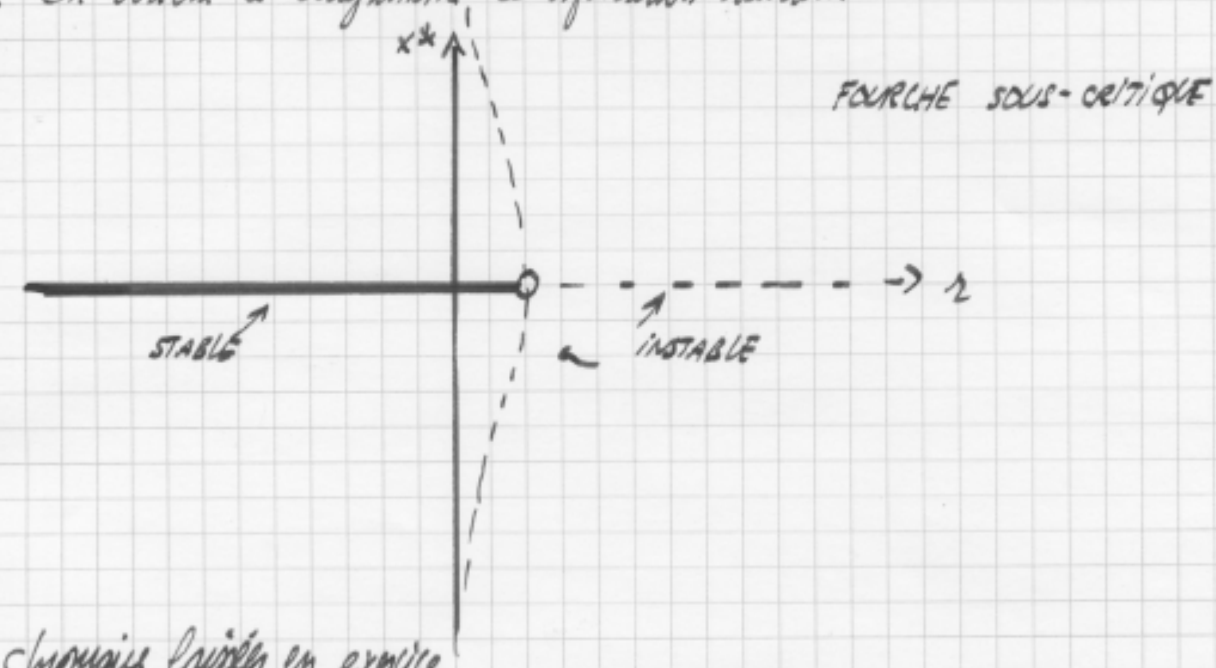
un seul point fixe $x^* = 0$ instable

cas ④ $r>1$



un seul point fixe $x^*=0$ instable

4. On obtient le diagramme de bifurcation suivant



chronogies laissées en exercice

⑤ BONUS: $x' = rx + \frac{x^3}{1+x^2} = rx + \frac{x^3+x-x}{1+x^2} = rx + x - \frac{x}{1+x^2} = (r+1)x - \frac{x}{1+x^2}$

cela revient à regarder le problème $x' = Rx - \frac{x}{1+x^2}$ qui est exactement le même que dans l'exercice ~~précéd~~ ③ questions 1 à 4, mais en translatant les valeurs de R par $+1$

Il y aura donc une fourche sous critique à $R=0$

et le diagramme de bifurcation sera le même que dans la question ④ translaté de 1 vers la gauche.

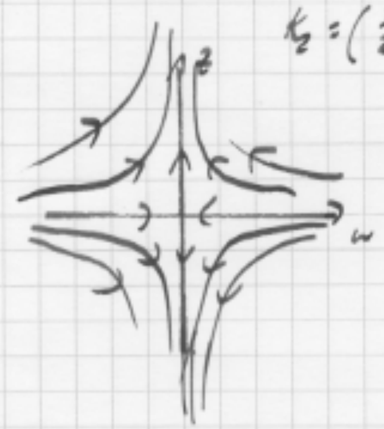
Ex 4. A. ① $A = \begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I) = (\lambda+1)(\lambda-4)=0$

② 2 valeurs propres $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=4$

③ vect. propres $k_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ associé à λ_1, $P=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}$ $J=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$

$k_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ " à λ_2 POINT SELLE

④



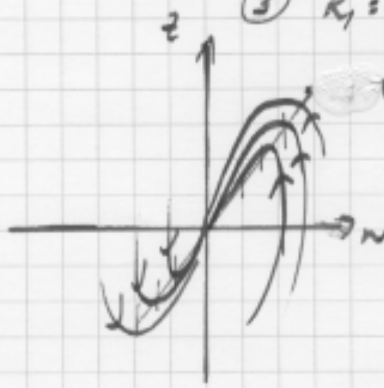
$\begin{cases} w = c_1 e^{-t}\\ z = c_2 e^{4t}\end{cases}$

B. $B=\begin{pmatrix}3&-18\\2&-9\end{pmatrix}$ ① $\det(B-\lambda I)=0 \Leftrightarrow (\lambda+3)^2=0$

② $\lambda_1=\lambda_2=-3$

③ $k_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ on a $P=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$ on aura $J=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-3\end{pmatrix}$

par passage avec $P_1 = P\begin{pmatrix}1&0\\0&c^{-1}\end{pmatrix}$



$\begin{cases} w=(c_1+tc_2)e^{-3t}\\ z = c_2e^{-3t}\end{cases}$

NOEUD DÉGÉNÉRÉ ASYMPTOTIQUEMENT STABLE

C. $C=\begin{pmatrix}2&8\\-1&-2\end{pmatrix}$

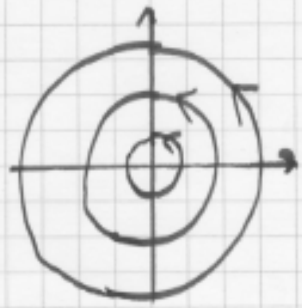
① $\det(C-\lambda I) = \lambda^2+4=0$

② $\lambda_1 = 2i$ $\bar\lambda_1=-2i$ $\alpha=0$ $\beta=2$

③ $k_1 = \begin{pmatrix}2+2i\\-1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{a} + i\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}}_{b}$ $P=\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$ $J=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$

coordonnées polaires $r' = \alpha r$ $\alpha=0$

$\theta' = \beta$ $\beta=2$



centre