INSA Lyon
Bât. Louis PASTEUR
11 Avenue Jean Capelle
69621 Villeurbanne

Bioinformatique et modélisation
3ème année
UE : Equations différentielles
et modélisation

Contrôle Partiel Ecrit- EDO
7 octobre 2014

Avant propos.

La durée du partiel est de 1h00. Aucun document, ni calculatrice, ni téléphone portable ne sera durant l'épreuve. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés.

Question de cours (10 minutes)(4 points)

1. (2 points) Enoncer et démontrer le lemme de Gronwall sous forme d'inéquation différentielle.
2. (2 points) Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Exercice 1 (20 minutes)(6 points)

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \;\; x''' + 2x'' + tx' + 6x + 5\cos(t) = 0,$$

pour $t \in I \subset \mathbb{R}$.

1. (1 point) Dire si cette équation différentielle est linéaire ou non et donner son ordre (justifier).
2. (1 point) Ecrire l'équation (E_1) sous forme normale.
3. (4 points) Ecrire cette équation sous forme d'équation d'ordre 1 en détaillant les calculs et en donnant le nombre d'équations et d'inconnues à résoudre.

Exercice 2 (30 minutes)(10 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E_2) \;\; x' = P(t) + Q(t)x + R(t)x^2,$$

où P, Q et R sont des fonctions données, supposées continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. (1 point) Reconnaître ce type d'équation. Justifier.
2. (1 point) On suppose que x_p est une solution particulière de (E_2) sur I. Par le changement de variable $x = x_p + u$ montrer que u vérifie

$$(E_3) \;\; u' = Q(t)u + 2R(t)x_p u + R(t)u^2.$$

3. (1 point) Reconnaître ce type d'équation. Justifier.
4. (2 points) Résoudre (E_3) en spécifiant l'intervalle I du mieux possible.
5. (5 points) Application : on considère l'équation différentielle

$$(E_4) \;\; x' = -\frac{4}{t^2} - \frac{1}{t}x + x^2 \quad \text{avec } x(1) = 1.$$

   (a) (1 point) Donner a priori l'intervalle maximal I sur lequel on peut résoudre (E_4). Justifier.

   (b) (1 point) A-t-on existence et unicité de la solution sur I ? Justifier.

   (c) (1 point) Chercher le réel α tel que $x_p : t \mapsto \dfrac{\alpha}{t}$ soit une solution particulière de (E_4).

   (d) (2 points) Résoudre (E_4). A-t-on une solution maximale ou globale dans $\mathbb{R}$? Détailler.

Exercice 3 (10 minutes)(BONUS : 4 points)

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathscr{C}) \;\; \begin{cases} x'(t)=\sqrt{x(t)}, & t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

1. (1 point) Vérifier que $x \equiv 0$ est solution de $(\mathscr{C})$.
2. (2 points) Construire une solution non nulle de classe $\mathscr{C}^1$ de ce problème.
3. (1 point) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi ?

Question de cours :

1. Lemme de Gronwall :

Supposons qu'une fonction $x \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$, où $I \subset \mathbb{R}$ vérifie

$$x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t) \quad (*)$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues et $x(t_0) = x_0$ pour $t_0 \in I$.

Alors $$x(t) \leq x(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma)\,d\sigma\right) b(s)\,ds$$

Preuve :

On multiplie $(*)$ par $\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) > 0$ on a alors

$$\left(x(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right)\right)' \leq \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) b(t)$$

Puis on intègre entre t_0 et t :

$$x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} - x(t_0) \leq \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\sigma)\,d\sigma} b(s)\,ds$$

$$\Rightarrow x(t) \leq x(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma)\,d\sigma} b(s)\,ds$$

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz local :

Soient $f \in \mathcal{C}(U;\mathbb{R}^N)$ où U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $(t_0, x_0) \in U$.

On suppose f lipschitzienne par rapport à x sur un voisinage V_0 de (t_0, x_0)

c.à.d qu'il existe $V_0 \subset U$ et $L > 0$ t.q. $\forall (t,x), (t,y) \in V_0$:

$$\| f(t,x) - f(t,y) \| \leq L\|x-y\|$$

Alors on a :

. il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution de $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} (S)$

. si y est une autre solution de (S) elle coïncide avec x sur un intervalle ~~max~~ d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T, t_0 + T]$

. si f est de classe $\mathcal{C}^r$, alors x est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$

Exercice 1.

(E_2) $x''' + 2x'' + tx' + 6x + 5\cos t = 0$

1. Equation différentielle linéaire d'ordre 3.

ordre 3 : car on a x'''

linéaire : . tous les termes en $x^{(i)}$ sont des monômes de d° 1

. tous les coef. devant $x^{(i)}$ sont constants, ou dépendant de t seulement

2. $x''' = -2x'' - tx' - 6x - 5\cos(t)$

ordre $n=3$

x à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $(m=1)$

et f " " " $\mathbb{R}^p$ $(p=1)$

On a 1 équation avec 1 inconnue d'ordre 3

3. On pose $Z = (x, x', x'') \in \mathbb{R}^3$

$z_1 = x$

$z_2 = x'$ $\qquad z_2 = z_1'$

$z_3 = x''$ $\qquad z_3 = z_2'$

$z_3' = x''' = -2x'' - tx' - 6x - 5\cos(t)$

càd

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = -2z_3 - tz_2 - 6z_1 - 5\cos(t) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $Z' = A(t)Z + B(t)$

où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -t & -2 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5\cos(t) \end{pmatrix}$

cela donne $p + m(n-1) = 1 + 1(3-1) = 1+2 = 3$ équations d'ordre 1

à $m.n = 1.3 = 3$ inconnues

Exercice 2

$(E_2) \qquad x' = P(t) + Q(t)\, x + R(t)\, x^2$

1. C'est une équation de Ricatti, exactement de la forme donnée en cours.

2. On pose $x = x_p + u$ et on remplace dans (E_2):

$x_p' + u' = P(t) + Q(t)(x_p + u) + R(t)\left(x_p^2 + 2x_p u + u^2\right)$

$\Leftrightarrow x_p' + u' = P(t) + Q(t)x_p + Q(t)u + R(t)x_p^2 + R(t)\left[2x_p u + u^2\right]$

Comme x_p solution de (E_2) on a: $x_p' = P(t) + Q(t)x_p + R(t)x_p^2$.

Il nous reste alors:

$u' = Q(t)u + 2R(t)x_p u + R(t)u^2 \qquad (E_3)$

3. C'est une équation de Bernoulli de la forme

$\tilde{x}' + \tilde{P}(t)\tilde{x} + \tilde{Q}(t)\tilde{x}^n = 0$

où $\tilde{P}(t) = -Q(t) - 2R(t)x_p$

et $\tilde{Q}(t) = -R(t)$

et $n = 2$ et $\tilde{x} = u$

4. On fait alors le changement de variable $v = u^{1-2} = u^{-1}$

ce qui nous donne alors

$v' + \left(Q(t) + 2R(t)x_p\right)v + R(t) = 0$

sous réserve que $t \in I$ où $I \subset \mathbb{R}$ t.q. $u(t) \neq 0$ pour $t \in I$

On peut alors résoudre (E_3) comme une EDO linéaire d'ordre 1:

$$v(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}[Q(s) + 2R(s)x_p(s)]ds}\left[v(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(-R(s)\, e^{\int_{t_0}^{s} Q(\sigma) + 2R(\sigma)x_p(\sigma)d\sigma}\right) ds\right]$$

puis on change en posant $u = v^{-1}$ sous réserve que $t \in \tilde{I}$ où $v(t) \neq 0$ pour $t \in \tilde{I}$

Et enfin, $x = x_p + u$.

5. Application

(E_4) $\quad x' = -\frac{4}{t^2} - \frac{1}{t}x + x^2$ avec $x(1)=1$

a. A priori on doit prendre $t \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit on résout (E_4) pour $t \in I_- =]-\infty, 0[$ ou $I_+ =]0, +\infty[$.

b. Si on pose $f : (t,x) \mapsto -\frac{4}{t^2} - \frac{1}{t}x + x^2$, $t \in I_-$ ou I_+

On a $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue

On a même $\tilde{f} : x \mapsto -\frac{4}{t^2} - \frac{1}{t}x + x^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Donc f est localement lipschitzienne et satisfait le théorème local de Cauchy-Lipschitz.

c. On pose $x_p = \frac{\alpha}{t}$ sol. particulière de (E_4) alors

$$\cancel{-\frac{\alpha}{t^2}} = -\frac{4}{t^2} \cancel{-\frac{1}{t}\frac{\alpha}{t}} + \left(\frac{\alpha}{t}\right)^2$$

$$\iff \frac{4}{t^2} = \frac{\alpha^2}{t^2} \iff \alpha^2 = 4$$

$$\iff \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = -2$$

On a le choix

On prend $\alpha = 2$ ici ($\alpha = -2$ est analogue)

Donc $x_p(t) = \frac{2}{t}$ convient

d. On procède comme dans 2) - 4)

On pose $x = \frac{2}{t} + u$, on a $P(t) = -\frac{4}{t^2}$ $\quad Q(t) = -\frac{1}{t}$ et $R(t) = 1$

Alors u satisfait

$$u' = -\frac{1}{t}u + 2 \cdot \frac{2}{t}u + u^2$$

càd $u' = \frac{3}{t}u + u^2$

On pose ensuite $v = u^{-1}$

Comme $x(1)=1$ on a $t_0=1 \in I_+ =]0,+\infty[$

Donc ici $t>0$.

On a $v' = \frac{-3}{t} v - 1 \; (*)$ Remarque: $x(t) = x_p(t) + u(t)$

$\Rightarrow x(1) = x_p(1) + u(1)$

$\Rightarrow u(1) = x(1) - x_p(1) = 1 - \frac{2}{1} = -1$

$\Rightarrow v(1) = \frac{1}{u(1)} = -1$

on résout $(*)$:

on a $\int_1^t \frac{3}{s} ds = 3[\ln s]_1^t = 3\ln t$, avec $t>0 \Rightarrow e^{3\ln t} = t^3$

$(*) \Rightarrow \int_1^t (s^3 v(s))' ds = -\int_1^t s^3 ds$

$\Rightarrow t^3 v(t) = v(1) - \left[\frac{s^4}{4}\right]_1^t = -1 - \frac{t^4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} - \frac{t^4}{4}$

$\Rightarrow v(t) = \frac{-3}{4} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{t}{4} = \frac{-[3+t^4]}{4t^3}$ défini sur I_+

$u(t) = \frac{1}{v(t)} = \frac{-4t^3}{3+t^4}$ défini sur I_+

et $x(t) = x_p(t) + u(t) = \frac{2}{t} - \frac{4t^3}{t^4+3}$, $t \in I_+$.

On vérifie que $x(1) = 1$.

On a une solution maximale sur $\mathbb{R}$; $\left(\frac{2}{t} - \frac{4t^3}{t^4+3} ; I_+\right)$

mais elle n'est pas globale car non définie pour $t=0$.

Exercice 3

$$(\mathcal{E}) \quad \begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. $x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

$x'(t) = 0$ on a bien $0 = \sqrt{0}$ et $x(0) = 0$.

Donc $x \equiv 0$ est bien solution de $\mathcal{E}$

2. Si on oublie un instant la condition initiale.

Soit $x : I \to \mathbb{R}$ solution de $x' = \sqrt{x}$ sur I et $x > 0$ sur I

on a $\dfrac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x(t)} = t + c$, $t + c > 0$ càd $t > -c$

$\Rightarrow \sqrt{x(t)} = \dfrac{t+c}{2}$

et $x(t) = \left(\dfrac{t+c}{2}\right)^2$ avec c t.q. $x(0) = 0$ cela donne : $c = 0$

On a donc $x(t) = \dfrac{t^2}{4}$ également solution sur $\mathbb{R}_+$.

On construit $x(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. c'est une solution $\mathcal{E}'$ de $(\mathcal{E})$

3. On a $x \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$ solution de $(\mathcal{E})$

et $x(t) = \begin{cases} t^2/4 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ également solution de $(\mathcal{E})$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas car $\sqrt{\ }$ n'est pas lipschitzienne au voisinage de 0.