Laurent PUJO-MENJOUET

PAS de t

Bâtiment BRACONNIER 246.

pujo@math.univ-lyon1.fr   math.univ-lyon1.fr\~pujo

12 septembre :

I Rappel sur les fonctions, les applications, les dérivées
(et rapels de quelques théorèmes fondamentaux)

1. Différence entre fonctions et applications :

Définition : une fonction est une relation que l'on note en général f entre un élément x appartenant à un ensemble de départ I ($I \subset \mathbb{R}$)

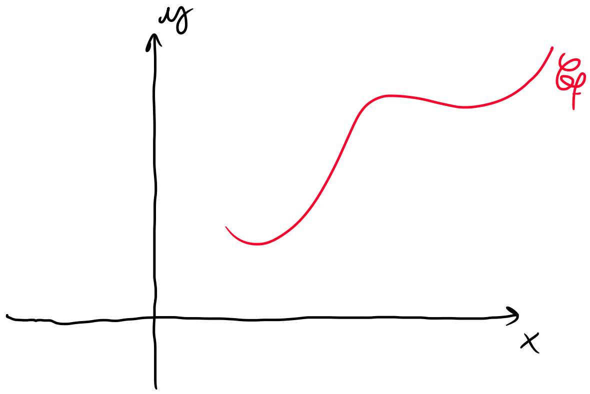
(on dit que x est un antécédent)

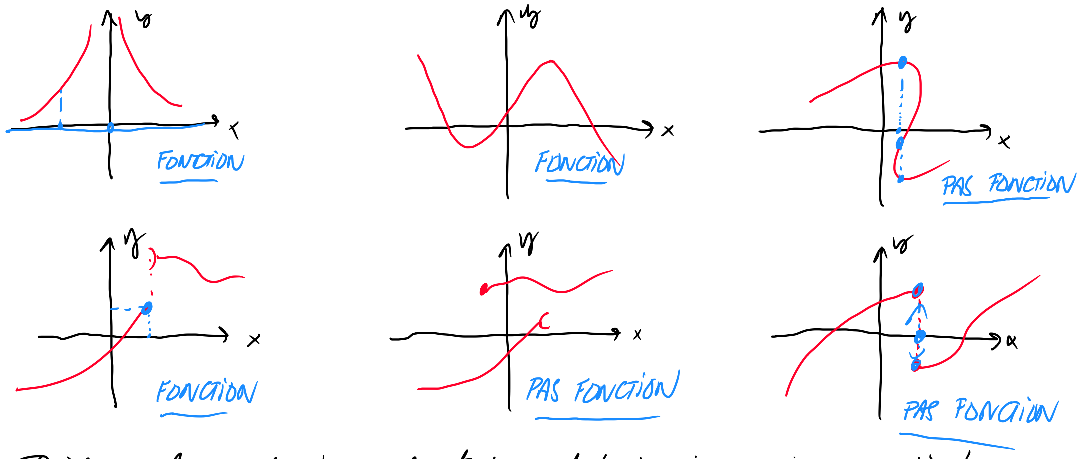
et **AU PLUS** un élément y appartenant à un ensemble d'arrivée J ($J \subset \mathbb{R}$)

(on dit que y est l'image de x par f)

OK

Representation "classique"





Règle : le graphe d'une fonction ne doit jamais revenir en arrière !

attention : NE PAS CONFONDRE

f → fonction

$f(x)$ → un nombre

$\mathcal{C}_f$ → représentation graphique

Par conséquent NE JAMAIS ÉCRIRE

la fonction $f(x)$ est croissante ... mais f est croissante

$f(x)$ est dérivable ... mais f est dérivable

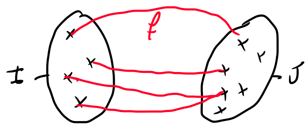
$f(x)'$ mais $f'(x)$

$f(x)'$ mais $f'(x)$

$f(x)$ est continue mais f est continue

Définition : APPLICATION

Une application f est une relation telle que chaque antécédent admet EXACTEMENT une image.



exemple : fonction ou application ou aucune des 2 ?

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ — FONCTION ET APPLICATION

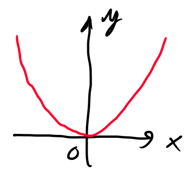
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ — FONCTION MAIS PAS APPLICATION

3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ — FONCTION PAS UNE APPLICAT°

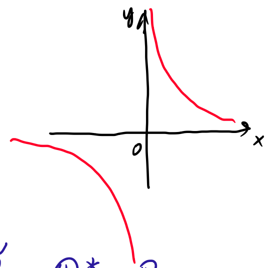
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ — APPLICATION

5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ — PAS APPLICATION

1.

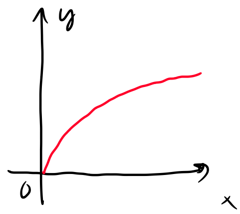


2.



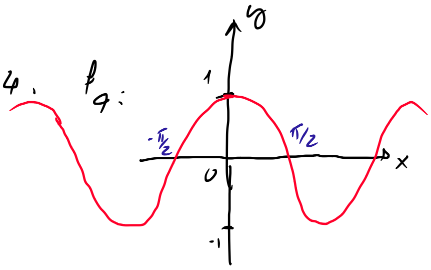
$\tilde{f}_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$

APPLICATION

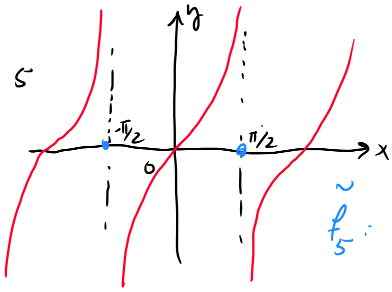


$\tilde{f}_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto \sqrt{x}$

4. f_4 :



5



$k \in \mathbb{Z}$

$\tilde{f}_5 : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$

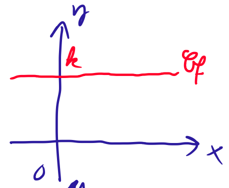
résumé

application $f : I \to J$ est une fonction en résumé : une application $f : I \to J$ est une fonction pour laquelle $I \subset \mathcal{D}_f$ (domaine de définition de f)

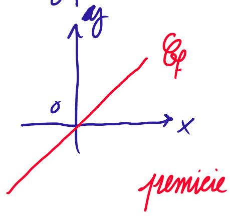
Remarque : dans tout le reste du cours on ne considèrera que les applications

2. Applications usuelles :

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$ — application constante

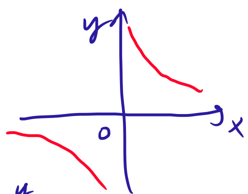


b. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ — identité

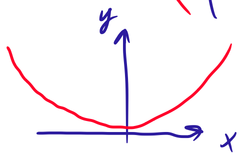


première bissectrice

c. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ — inverse



d. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ — carré

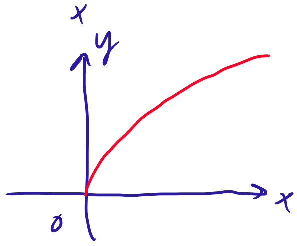


$\mapsto x^2$

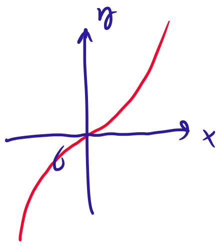
e. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$

racine carrée

0 |



f. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

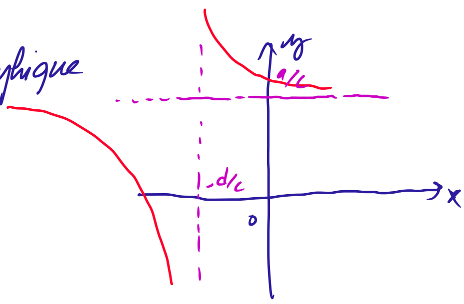


cube

g. $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

$c \neq 0$

homographique



h. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^{p/q}$

$q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}$ $\quad x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$

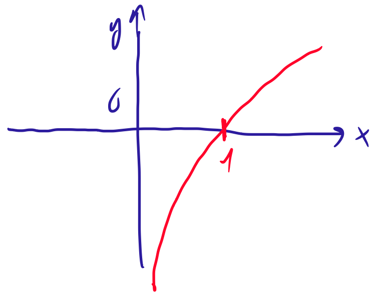
ex: si $p = 1$ et $q = 2$ $\quad x^{1/2} = \sqrt{x}$

ex : si $p=1$ et $q=2$ $\quad x^{1/2} = \sqrt{x}$

si $p=-1$ et $q=2$ $\quad x^{-1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

i. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $\quad$ logarithme

$x \mapsto \ln x$



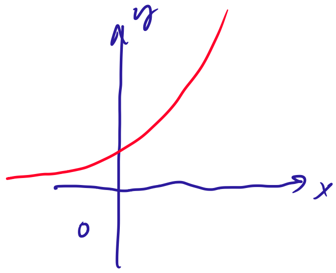
Rappel : $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a, b > 0)$

$\ln a^n = n \ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

j. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

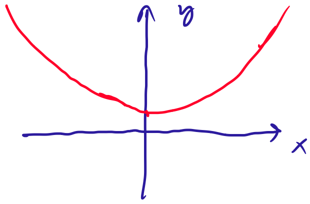
$x \mapsto e^x$



k. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto ch(x) \quad (\cosh(x)) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

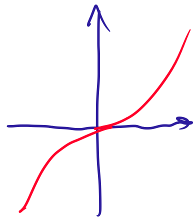
cosinus hyperbolique



l. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

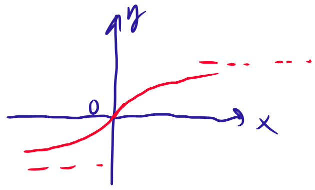
$x \mapsto sh(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

sinus hyperbolique



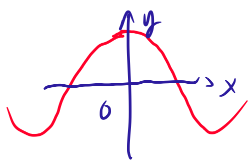
m. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$



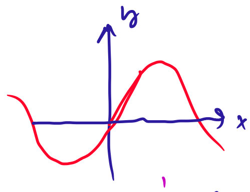
n. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos x$



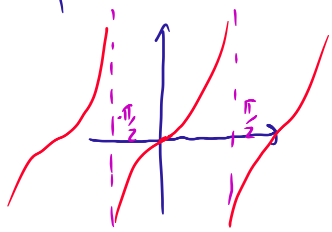
o. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

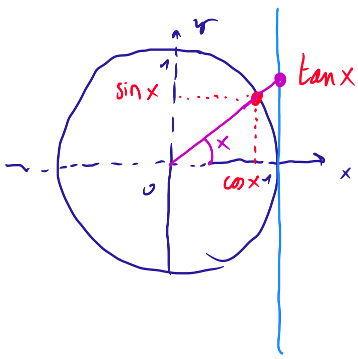
$x \mapsto \sin x$



p. $f : \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$





3. Dérivation

Définition : on appelle dérivée de f l'application $f : I \to J$, $x \mapsto f(x)$ $(I, J \subset \mathbb{R})$

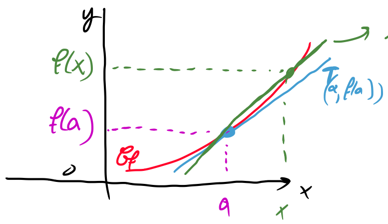
Définition

$x \mapsto f(x)$

en a $(a \in I)$, la limite si elle existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{et on la note } f'(a)$$

interprétation



sécante à C_f passant par $(a, f(a))$, $(x, f(x))$

de pente : $\underbrace{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\text{pente de la sécante}} \xrightarrow[x \to a]{} \underbrace{f'(a)}_{\text{pente de la tangente à } C_f \text{ en } (a, f(a))}$

Remarque : si on pose $h = x-a$ alors $x = a+h$

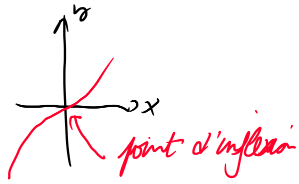
si $x \to a$ alors $h \to 0$

$$\text{et } f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Rapel : si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I

- si pour tout $x \in I$ $\quad f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante
- " " " $\quad f'(x) < 0$ " " décroissante

Attention : si f est strict. croissante $\not\Rightarrow$ $f'(x) > 0$



ex : $x \mapsto x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$!!!

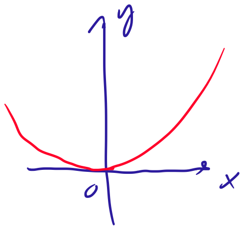
alors $f'(x) \geq 0$ mais si $f'(x) = 0$ c'est en un point (pas en un intervalle)

ce sont les points d'inflexion

Propriété : si f est dérivable 2 fois et si pour tout $x \in I$ $\quad f''(x) \geq 0$

on dit que f est CONVEXE ("tournée vers le haut) que f est CONVEXE ("tournée vers le haut")

ex : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$



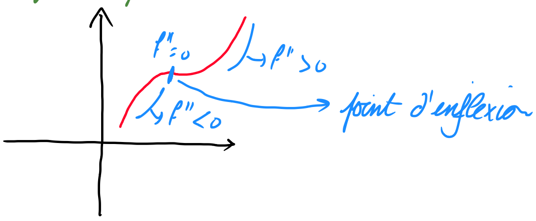
$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

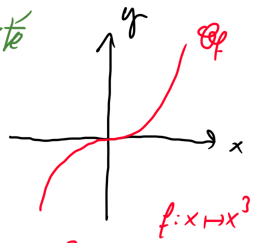
$f''(x) = 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

13 septembre 2022

Remarque : que se passe-t-il quand la courbe change de concavité



ex :

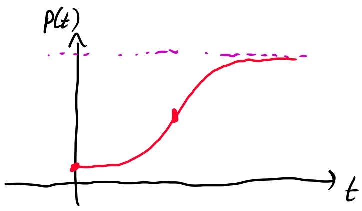


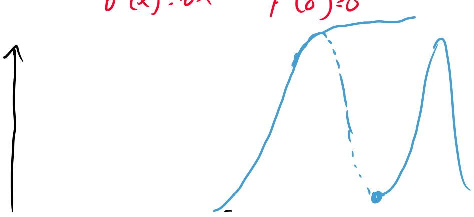
$f : x \mapsto x^3$

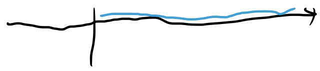
$f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x$ $\quad f''(0) = 0$

ex :







dérivées usuelles

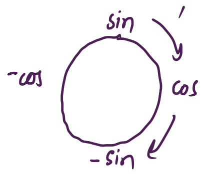
	f	f'
applications puissances	$k \in \mathbb{R}$	0
	x	1
	$ax+b$	a
	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$
	$n \in \mathbb{N}^*$ x^n	nx^{n-1}
	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$x^{p/q}$	$\frac{p}{q} x^{p/q - 1}$
applications hyperboliques	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	e^x	e^x
	$ch(x)$	$sh(x)$
	$sh(x)$	$ch(x)$

$(x^{1/2})' \rightarrow \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$ch\,x \underset{'}{\overset{'}{\rightleftarrows}} sh\,x$

applications trigonométriques

f	f'
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	(en exercice)



Rappel :

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Important : dérivée d'une application composée

soient $f : I \to J$ $\quad g : J \to K$

$I \longrightarrow J \longrightarrow K$

$g \circ f : \quad x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x)) \qquad g\circ f(x) = g(f(x))$

Attention $g \circ f \neq f \circ g$ l'ordre compte !

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$ $\quad x \mapsto 3x+1$

- $f\circ g(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = (3x+1)^2$

  $x \xmapsto{g} 3x+1 \xmapsto{f} (3x+1)^2$

- $g \circ f(x) = g(f(x)) = 3x^2+1$

  $x \xmapsto{f} x^2 \xmapsto{g} 3x^2+1$

Dérivée : $\underbrace{(f\circ g)'}_{(f(g(x)))'}(x) = f'(g(x)).g'(x)$

ex 1 $\quad f : x \mapsto e^x \qquad (f\circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$g : x \mapsto \sqrt{x} \qquad = e^{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}.u'(x)$$

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.u'(x)$$

Remarque : si $f : I \to J$ est bijective c'est à dire qu'il existe $f^{-1} : J \to I$ une application réciproque. Comment exprimer $(f^{-1})'$?

$f^{-1}(y) = x \overset{f}{\underset{f^{-1}}{\rightleftarrows}} f(x) = y$

Démonstration : soit $x \in I$, $\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{f^{-1}\circ f(x)} = x$

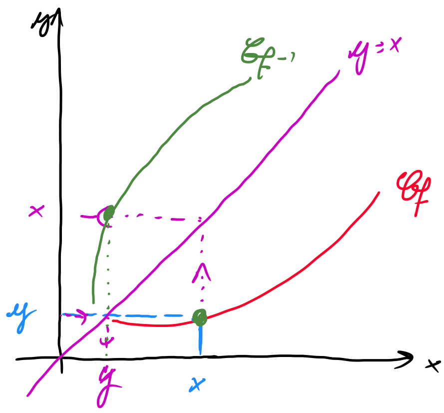
$f^{-1}\circ f(x) = x$

en dérivant : $f^{-1\prime}(f(x)).f'(x) = 1$

$f^{-1\prime}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ en supposant $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

$\Leftrightarrow \boxed{f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}} \qquad f^{-1\prime} = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$

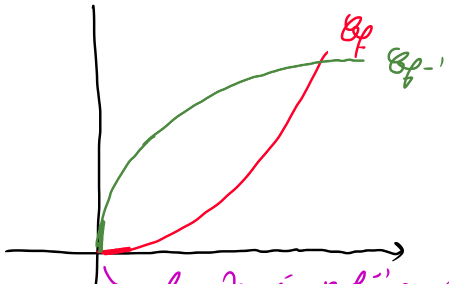
Interprétation



$\boxed{f^{-1}(y) = x} \;\underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}}\; f(x) = y$

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto x^2$

$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{x}$



la dérivée de f^{-1} en 0 n'existe pas !

4. Primitives et intégrales:

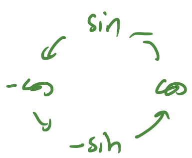
<ins>Définition</ins>: soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <ins>continue</ins> sur I

une primitive de f sur I est une application

F dérivable sur I t.q. $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$

<ins>exemple</ins>: si $f : x \mapsto x^2$

$F(x)$ est t.q. $F'(x) = x^2$ donc $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, $C \in \mathbb{R}$



si $f : x \mapsto \cos x$ alors: $F(x) = \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$

Exercice : (sur les dérivées) Calculer f' avec $f_1 : x \mapsto \sqrt{\cos x}$ $f_2 : x \mapsto \sin(3x+2)$ $f_3 : x \mapsto e^{\cos x}$ $f_4 : x \mapsto \ln\sqrt{x}$ $f_5 : x \mapsto 2^{\ln x}$

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\cos x}$

$f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

$f_2 : x \mapsto \sin(3x+2)$

$f_2'(x) =$

$f_3 : x \mapsto e^{\cos x}$

$f_3'(x) =$

$f_4 : x \mapsto \ln\sqrt{x}$

$f_4'(x) =$

$f_5 : x \mapsto 2^{\ln x}$

$f_5'(x) =$

Retour aux primitives

Notation : on note en général $F(x) = \int f(x)\,dx$ } ne pas confondre avec l'intégrale de f entre a et b $\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété : Les primitives sont définies à une constante près

Preuve : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue

Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I

Par définition : $F_1'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

$F_2'(x) = f(x)$ "

Alors $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$

$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0 \Leftrightarrow (F_1 - F_2)(x) = c$

Conclusion $F_1(x) - F_2(x) = c \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) + c$

Tableau des primitives

	f	F	
	$x \mapsto 0$	$x \mapsto c$	, $c \in \mathbb{R}$
si $a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$x \mapsto ax + c$	, "
	$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c$	
si $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$x \mapsto x^n$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1}$	
si $n = -1$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert + c$	
	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	
	$x \mapsto x^{1/2}$	$x \mapsto \frac{2}{3} x^{3/2} + c$	
	$x \mapsto x^{p/q}$	$x \mapsto \frac{1}{p/q+1} x^{p/q+1} + c$	

$x^{1/2} \sim \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} x^{3/2}$

$x \mapsto x^{p/q}$	$x \mapsto \frac{1}{\frac{p}{q}+1} x^{p/q+1} + C$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + C$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + C$
$x \mapsto ch(x)$	$x \mapsto sh(x) + C$
$x \mapsto sh(x)$	$x \mapsto ch(x) + C$

<u>Remarque</u> : 1). $\int f'(x)dx = f(x) + c$

2). comme $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) . g'(x)$

alors $\int f'(g(x)).g'(x)dx = \int (f \circ g)'(x)dx = (f \circ g)(x) + c$

<u>exercice</u> : calculer $\int \sin(x)\, e^{\cos(x)} dx = ?$

$$\int \sin(x)\, e^{\cos(x)} dx = \int -\left(e^{\cos x}\right)' dx$$

$$= -e^{\cos x} + c$$

$-(-\sin x\, e^{\cos x}) = -\left(e^{\cos x}\right)'$

$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} . u'(x)$

Quelques formules utiles : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ $\qquad (u^n)' = n . u^{n-1} . u'$

$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

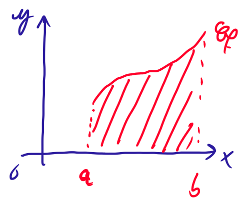
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

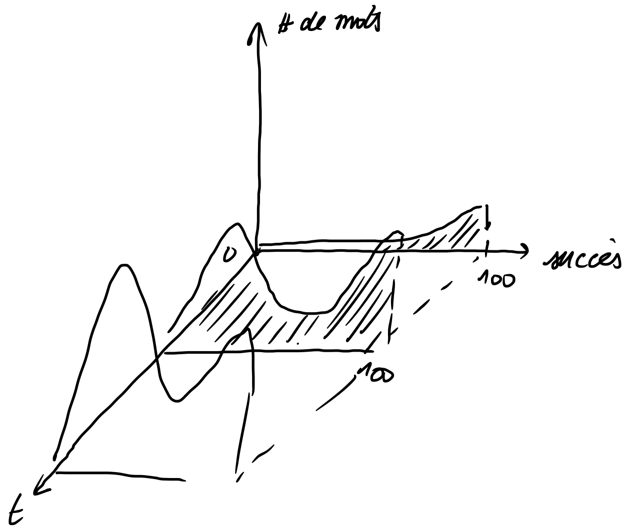
exercice: calculer ① $\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}}\,dx$ ② $\int \frac{ch(x)}{sh(x)}\,dx = ?$

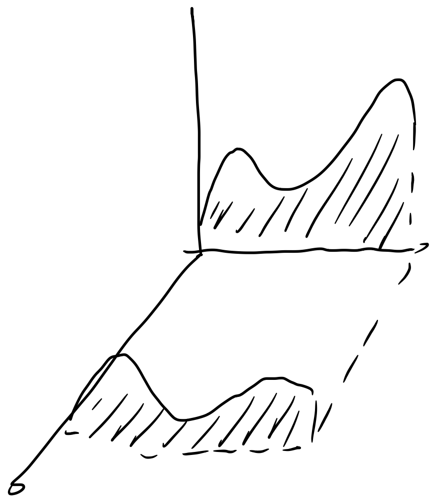
Intégrales: définition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec f continue sur $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$ où F est une primitive de f

Interprétation graphique: Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$ $\int_a^b f(x)\,dx =$ aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$



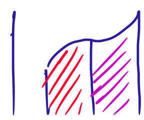




Propriété:

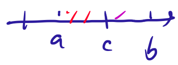
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ (Relation de Chasles)



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$



Important : $x \longmapsto \int_a^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(a)$ fonction de x

attention : variable

pas x

c'est la primitive de f qui s'annule en a : $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[F(x) - F(a)\right] = F'(x) = f(x)$$

13 septembre 2022 cours 3/5

Rappel : théorème fondamental du calcul $\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$

Intégration par parties :

rappel : $(fg)' = f'g + fg'$ donc $f'g = (fg)' - fg'$

donc $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \int_a^b (f.g)'(x)\,dx - \int_a^b f(x).g'(x)\,dx$

$= \left[f(x).g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

Exercice : Calculer ① $\int_0^1 xe^x\,dx$

$\int_0 xe^x dx$

(2) $\int_0^{\pi} \cos(x) e^x dx$

(3) $\int_0^1 sh(x) e^x dx$

II Equations differentielles

1 Définition

a. Equations differentielles ordinaires (edo en anglais ode)

Définition: une edo d'ordre n est une relation entre la variable reelle t, une application inconnu x $(t \mapsto x(t))$ et ses derivées $x', x'', x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ au point t définie par

$\boxed{F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0}$ avec F dependante de $x^{(n)}$

où $t \in I \subset \mathbb{R}$, $x : I \to \mathbb{R}^N$ en general $N = 1, 2, 3$

on dit que l'edo est SCALAIRE si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$

exemple : $x'' + 3x' + \cos x + e^{t} = 0$ ordre 2

b. Equation différentielle normale

Définition : on appelle edo sous forme normale d'ordre n, toute équation de la forme

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

c. Eq. différentielle autonome

Définition : on appelle edo autonome d'ordre n toute équation de la forme

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

Exemple :

$x' = f(t, x)$ n'est pas autonome

$x' = f(x)$ est autonome

d. Equation différentielle linéaire

Définition une edo d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_n(t) \cdot x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2(t) x''(t) + a_1(x) x'(t) + a_0(t) x(t) = g(t)$$

pour tout $t \in I$

où les coefficients $a_j(t)$ sont - soit constants (voire nuls)

- soit dépendant de t MAIS JAMAIS de x, ni de ses dérivées !!

même chose pour $g(t)$

et x et ses dérivées sont exprimées SEULEMENT en monômes de degré 1

càd x, x', x''...

càd pas de x^2, x^3, ..., $\frac{1}{x}$, $\tan x$, $\cos x$..

Une edo linéaire devient autonome si tous les a_j et g sont indépendants de t (sont constants)

<u>Exercice</u> : Donner l'ordre des eds suivantes, dire si elles sont linéaires ou pas,

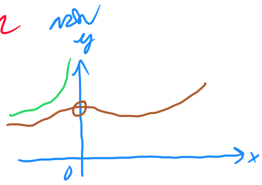
si " " autonomes ou pas

" " " sous forme normale ou pas

		ORDRE	LINÉAIRE	AUTONOME	FORME NORMALE
①	$x - t + 4tx' = 0$	1	oui	NON	NON mais on peut poser $4tx' = t - x$ si $t \in]-\infty, 0[$ ou $t \in]0, +\infty[$ alors $x' = \frac{t-x}{4t}$ NE PAS ECRIRE $t \in \mathbb{R}^*$!!
②	$x''^2 - 2x' + x = 0$	2	non	oui	NON
③	$x^{(3)} + \sin(x') = -5x$	3	non	oui	NON
④	$x^{(4)} - xx'' = 0$	4	non	oui	NON
⑤	$3x'' - 4x' + 6x = 2$	2	oui	oui	NON
⑥	$\ln(x') + 3tx = \sqrt{x}$	1	non	non	NON

$\ln x' = \sqrt{x} - 3tx$

$t \in I$ t.q. $x'(t) > 0$



e . solutions

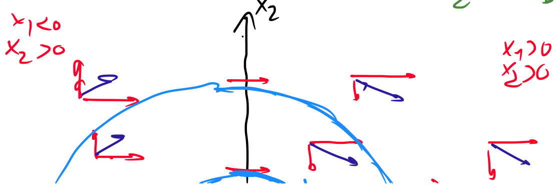
Définition : on appelle solution (ou intégrale) d'une edo d'ordre n, sur un certain intervalle I de $\mathbb{R}$ toute application x définie sur I n fois dérivable en tout point de I et qui vérifie l'edo $F(t,x,..,x^{(n)})=0$

Définition :

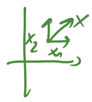
- On appelle courbe intégrale ou chronique l'ensemble des points $(t,x(t))$ où t parcourt I.
  Autrement dit si x est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, la courbe intégrale est un ensemble de points de $\mathbb{R}^{N+1}$ $\quad (\underset{\in\mathbb{R}}{t}, \underset{\in\mathbb{R}^N}{x}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$

- on appelle orbite (trajectoire) l'ensemble des points $x(t)$ où t parcourt I c'est un ensemble des points de $\mathbb{R}^N$

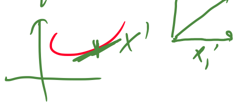
exemple on considère l'edo $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$

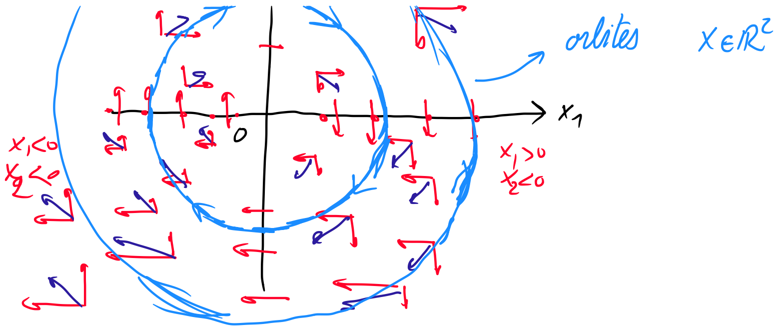


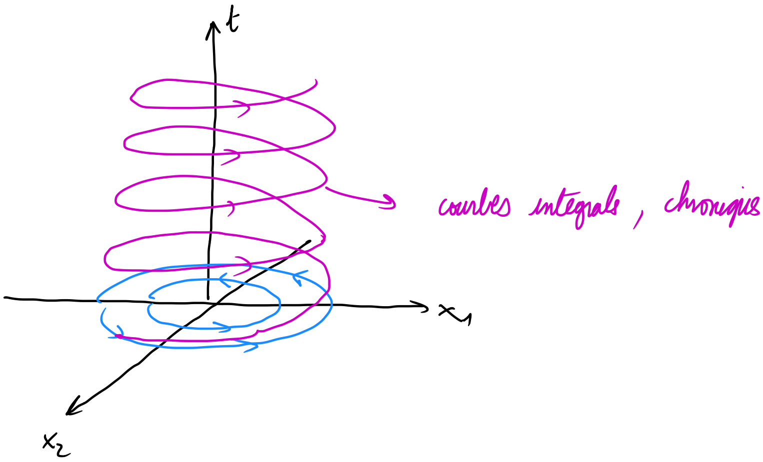
$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



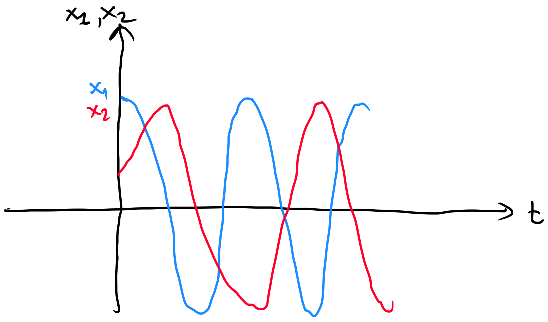
$X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$




orbites
$x \in \mathbb{R}^2$
x_1
O
$x_1<0$
$x_2<0$
$x_1>0$
$x_2<0$


t
x_1
x_2
courbes intégrales, chroniques

x_2



$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

Hudson's bay company

f. Réduction à l'ordre 1

$x' = f(t,x)$

$\boxed{X' = f(X)}$

Toute edo d'ordre n peut se réduire à une edo d'ordre 1.
Autrement dit on pourra toujours écrire une edo sous la forme
$F(t,x,x')=0$

en general, (dans ce cours) on se débrouillera pour avoir la forme normale $x' = f(t,x)$

exemple: $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ (**)

$F(t,x,x',x'')=0$
ici : $a(t)x''+b(t)x'+c(t)x-d(t)=0$
$F:(t,x,x',x'') \mapsto a(t)x''+b(t)x'+c(t)x-d(t)$

ordre : 2
inconnue : 1 $: x$
equation : 1

On veut se ramener à l'ordre 1.

METHODE: on pose $z_1 = x$

$z_2 = x'$ $\qquad x'' = z_2'$ $\qquad$ et $z_2 = z_1'$ (*)

(*) $z_1' = z_2$

(**) $a(t).z_2' + b(t).z_2 + c(t).z_1 = d(t)$

$$z_1' = z_2$$
$$a(t)z_2' = -c(t)z_1 - b(t)z_2 + d(t)$$

si $a(t) \neq 0$
$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -\dfrac{c(t)}{a(t)}z_1 - \dfrac{b(t)}{a(t)}z_2 + \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c(t)}{a(t)} & -\dfrac{b(t)}{a(t)} \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{pmatrix}}_{b}$$

si on pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ $\quad Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{Z' = AZ + b}$ equation différentielle d'ordre 1 !

ordre 1
inconnue : 2
equation : 2

exercice : réduire à l'ordre 1 le système suivant

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' + x_2' + 2(x_1 - x_2) \\ x_2'' = x_1' - x_2' + 2(x_1 + x_2 \end{cases}$$

ordre 2

inconnues : 2

équations : 2

Méthode générale : On considère l'edo suivante

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$$

. $t \in I \subset \mathbb{R}$

. $x : I \to \mathbb{R}^m$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

. $F : (t, x, \dots, x^{(n)}) \to F(t, x, \dots, x^{(n)})$

$$\mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{n+1} \to \mathbb{R}^p$$

$$\mathbb{R}^{n+2} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

ordre : n

inconnues : m $\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

équations : p $\qquad \begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \\ \vdots = 0 \\ F_p = 0 \end{cases}$

méthode pour réduire à l'ordre 1. on fait le changement de variable :

On pose $Z = (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ → attention on s'arrête à $n-1$

$\in \mathbb{R}^m$ $\in \mathbb{R}^m$ $\in \mathbb{R}^m$

donc $Z \in (\mathbb{R}^m)^n$ et on note $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \in \mathbb{R}^m \\ \in \mathbb{R}^m \\ \\ \in \mathbb{R}^m \end{matrix}$

avec
$$z_1 = x$$
$$z_2 = x' = z_1'$$
$$z_3 = x'' = z_2'$$
$$\vdots$$
$$z_i = x^{(i-1)} \qquad i = 1, \dots, n$$
$$z_{i+1} = z_i' \qquad i = 1, \dots, n-1$$

on obtient alors
$$\left\{ \begin{array}{l} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_i' = z_{i+1} \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ F(t \end{array} \right.$$

ordre 1

inconnues : $m \times n$

equations : $p + m \times (n-1)$

$$F(t, z_1, z_2, \ldots, z_n, z_n') = 0$$

<u>Remarque</u>: dans tout le reste du cours, on étudiera les edo d'ordre 1 seulement !!

. Elles seront de la forme

$$x' = f(t, x)$$

ou $x' = f(x)$ (autonomes)

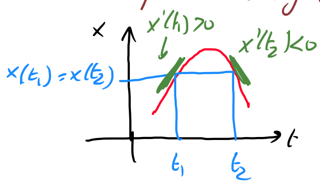
9. <u>Propriété</u> des edo <u>autonomes scalaires</u> (càd $x' = f(x)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) (dimension 1)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I alors toute solution non constante de $x' = f(x)$ est nécessairement MONOTONE sur I

$x' = f(x)$ est nécessairement MONOTONE sur I

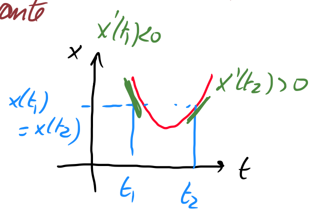
(soit croissante, soit décroissante sur I) $\Downarrow$ elle n'oscille pas

Preuve : Supposons par l'absurde que x n'est pas monotone donc à un certain moment (sur un intervalle), x peut se comporter de la façon suivante



$x'(t_1) . x'(t_2) < 0$

ou



$x'(t_1) . x'(t_2) < 0$

or $x' = f(x)$ donc

$$x'(t_1) . x'(t_2) < 0 \Leftrightarrow f(x(t_1)) . f(x(t_2)) < 0$$

$$\underset{\text{or } x(t_1) = x(t_2)}{\Leftrightarrow} f(x(t_1)) . f(x(t_1)) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x(t_1))^2 < 0$$

on aboutit à une contradiction. Conclusion x est monotone !!

h. Quelques techniques de résolution d'edo

a. Edo linéaire d'ordre 1

On considère l'edo suivante $(E)\; a(t)\,x' + b(t)\,x = d(t)$ où a, b et d sont continues sur I $t \in I \subset \mathbb{R}$

on supposera que $a(t) \neq 0$ sur I.

CAS A : $\boxed{d(t)=0}$ $(E)\quad a(t)\,x' + b(t)\,x = 0$

méthode 1 : étape 1. On divise (E) par $a(t)$: on obtient

$$x' + \frac{b(t)}{a(t)}\,x = 0 \quad (1)$$

étape 2 : $(1) \Leftrightarrow x' = -\frac{b(t)}{a(t)}\,x$

étape 3 : on suppose $x(t) \neq 0$ sur I : $\frac{x'}{x} = \frac{-b(t)}{a(t)}$

Remarque : si $\boxed{x \equiv 0 \text{ sur } I}$ identiquement nul (nul partout sur I) solution de (E)

$$\underbrace{x'}_{0} + \frac{b(t)}{a(t)}\underbrace{x}_{0} = 0$$

grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz (existence unicité), si x n'est pas la solution nulle, alors x ne peut s'annuler en aucun point.

étape 4 : on intègre des 2 cotés :

$$\int \frac{x'}{x} dt = -\int \frac{b(t)}{a(t)} dt$$

$$\ln|x| = -\int \frac{b(t)}{a(t)} dt + c$$

étape 5 : $|x| = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt + c} = e^c \cdot e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

étape 6 : alors $x = e^c e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

ou

$x = -e^c e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ $\Rightarrow x = k e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ où $k = e^c$ ou $-e^c$

Méthode 2 : étape 1 : on divise par $a(t)$: (1) $x' + \frac{b(t)}{a(t)} x = 0$

étape 2 : on multiplie par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

explication : rappel $(e^u)' = e^u \cdot u'$

ici $u = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt \rightarrow u' = \frac{b(t)}{a(t)}$

donc : en multipliant par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ $(1) \Leftrightarrow e^{u} \cdot x' + u' \cdot e^{u} x = 0$

$\Leftrightarrow (e^{u} x)' = 0$

$\Leftrightarrow e^{u} x = C$

$\Leftrightarrow x = Ce^{-u} = Ce^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$

exercice : Résoudre ① $2x' + 6x = 0$ avec $x(0) = 1$

② $x' + \frac{1}{t} x = 0$ avec $x(1) = 1$

Remarque : on peut trouver la formule directement quand on connaît la condition initiale

On a le problème suivant :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} a(t)x' + b(t)x = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(on l'appelle problème de Cauchy)

avec $t \in I \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$

On suppose a, b continues sur I et $a(t) \neq 0$ sur.

Résolution :

① • on divise par $a(t)$: $x' + \frac{b(t)}{a(t)} x = 0$ (E)

② • On multiplie (E) par $e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds}$ → pas t !

③ • on obtient $(E) \iff \left(e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \cdot x(t)\right)' = 0$

④ • on intègre entre t_0 et t :

$$\int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(e^{\int_{t_0}^{z} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(z)\right)'}_{f'(z)\,ds} dz = \int_{t_0}^{t} 0\, dz = 0$$

$\int_a^b f(t)\,dt = F(a) - F(b) = k - k = 0$

or $\int_a^b f'(s)\,ds = f(b) - f(a)$ donc ici, on obtient

$$\underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t)}_{f(t)} - \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t_0} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t_0)}_{f(t_0)} = 0$$

$$\iff e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) - x(t_0) = 0$$

$$\iff e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) = x_0$$

$x(t_0) = x_0$

$$\iff \boxed{x(t) = x_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds}}$$

CAS 3 : $d(t) \neq 0$ On considère l'edo $a(t)x' + b(t)x = d(t)$ (E)
avec $t \in I \subset \mathbb{R}$, a, b et d continues sur I et $a(t) \neq 0$ sur I

① $(E) \Leftrightarrow x'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} x = \frac{d(t)}{a(t)}$ (on divise par a)

② on multiplie (E) par $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt}$ ce qui donne $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x' + \frac{b(t)}{a(t)} e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot \frac{d(t)}{a(t)}$

③ Par conséquent $(E) \Leftrightarrow \left(e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot x \right)' = e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot \frac{d(t)}{a(t)}$

Ce qui donne $e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} x = \int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \cdot \frac{d(s)}{a(s)} ds + K$

et ainsi $x = e^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \left(\int e^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \frac{d(s)}{a(s)} ds + K \right)$

Remarque : si la condition initiale est donnée

On considère $(\mathcal{C})$ $\begin{cases} a(t)x' + b(t)x = d(t) \; (E) & , t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 & t_0 \in I \quad , x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

a, b, d continues sur I et $a(t) \neq 0$ sur I.

① on divise (E) par $a(t)$: $x' + \frac{b(t)}{a(t)} x = \frac{d(t)}{a(t)}$

② on multiplie (E) par $e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)}}$ et on obtient

$$\left(e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) \right)' = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \frac{d(t)}{a(t)}$$

③ On intègre entre t_0 et t :

$$\int_{t_0}^{t} \left(e^{\int_{t_0}^{z} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(z) \right)' dz = \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{z} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \cdot \frac{d(z)}{a(z)} dz$$

$$\Leftrightarrow e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) - \underbrace{e^{\overbrace{\int_{t_0}^{t_0} \frac{b(s)}{a(s)} ds}^{=0}}}_{e^0 = 1} \underbrace{x(t_0)}_{x_0} = \text{———}$$

$$\Leftrightarrow e^{\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{z} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \cdot \frac{d(z)}{a(z)} \cdot dz$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{z} \frac{b(s)}{a(s)} ds} \cdot \frac{d(z)}{a(z)} \cdot dz \right]$$

exercice : Résoudre $\begin{cases} tx' + 2x = te^t \ (E) \\ x(1) = 3 \end{cases}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$
$\uparrow$ à déterminer !

Réponse : Comme on va diviser par t chacun des membres de (E) et que $x(1) = 3$ ($t_0 > 0$)
on considère $t \in I \subset]0, +\infty[$

① On divise par t et (E) s'écrit $x' + \frac{2}{t} x = e^t \ (E')$

② On multiplie (E') par $e^{\int_1^t \frac{2}{s} ds} = e^{2[\ln(s)]_1^t} = e^{2[\ln t - \ln 1]} = e^{2\ln t - 0} = (e^{\ln t})^2 = \boxed{t^2}$

on obtient $(t^2 . x)' = t^2 e^t$

③ on intègre entre 1 et t des 2 côtés : $\int_1^t (s^2 x(s))' ds = \int_1^t s^2 e^s ds$

$\Leftrightarrow t^2 x(t) - 1^2 . \overset{=3}{x(1)} = \int_1^t s^2 e^s ds$

$\Leftrightarrow t^2 x(t) = 3 + \int_1^t s^2 e^s ds$

$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{t^2} \left[3 + \boxed{\int_1^t s^2 e^s ds} \right]$

or $\int_1^t s^2 e^s ds = [s^2 e^s]_1^t - \int_1^t 2 s e^s ds = t^2 e^t - e - 2 \underbrace{\int_1^t s e^s ds}$ on pose $f'(s) = e^s \Rightarrow f(s) = e^s$, $g(s) = s \Rightarrow g'(s) = 1$

$f'(s) = e^s \Rightarrow f(s) = e^s$
$g(s) = s^2 \Rightarrow g'(s) = 2s$

$= t^2 e^t - e - 2 \left([s e^s]_1^t - \int_1^t e^s ds \right)$

$$= t^2e^t - e - 2\left(te^t - e - (e^t - e)\right)$$

$$= t^2e^t - e - 2te^t + \cancel{2e} + 2e^t - \cancel{2e}$$

$$= (t^2 - 2t + 2)e^t - e$$

Conclusion $\quad x(t) = \dfrac{1}{t^2}\left[3 + (t^2 - 2t + 2)e^t - e\right].$

<u>Remarque</u>. la très grande majorité des modèles issus de la biologie et de la médecine sont malheureusement <u>NON LINÉAIRES</u>

<u>Mauvaise nouvelle</u> : on ne sait pas en général trouver de solution explicite pour de telles équations sauf pour quelques exceptions

comme l'équation de <u>BERNOULLI</u>

pas de i

Les équations de Bernoulli sont de la forme :

équations de Bernoulli sont de la forme :

$$x' + P(t)\,x + Q(t)\,x^r = 0 \qquad t \in I \subset \mathbb{R}$$

On suppose P et Q continues sur I

si $\boxed{r=0}$: $x' + P(t)x + Q(t) = 0$ on reconnait une edo de la forme $\underbrace{a(t)}_{1}x' + \underbrace{b(t)}_{P(t)}x = \underbrace{d(t)}_{-Q(t)}$ on sait résoudre

si $\boxed{r=1}$ $x' + P(t)x + Q(t)x = 0$

$\Leftrightarrow x' + (P(t) + Q(t))\,x = 0$ on reconnait une edo de la forme $\underbrace{a(t)}_{1}x' + \underbrace{b(t)}_{P(t)+Q(t)}x = 0$ on sait la résoudre

On suppose à présent que $\boxed{r \neq 0}$ et $\boxed{r \neq 1}$. $(r \in \mathbb{R})$

$$x' + P(t)x + Q(t)x^r = 0 \quad (B)$$

Méthode : On cherche les solutions dans I t.q. $x(t) > 0$ pour tout $t \in I$
(par exemple, si $r = \frac{1}{2}$ $x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to x > 0$)

On peut alors diviser (B) par x^r :

On obtient $x' \cdot x^{-r} + P(t)x \cdot x^{-r} + Q(t) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x' \cdot x^{-r} + P(t)\,x^{1-r} + Q(t) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{x' \, x^{-r}} + P(t) \, \underbrace{x^{1-r}} + Q(t) = 0$

ASTUCE : on pose $\boxed{u = x^{1-r}}$

donc $u' = (1-r) \, x^{(1-r)-1} \cdot x' = (1-r) \underbrace{x^{-r} \cdot x'}$

donc (E') s'écrit $\frac{1}{1-r} \cdot u' + P(t) \, u + Q(t) = 0$

$\Leftrightarrow u' + (1-r) P(t) \, u + (1-r) Q(t) = 0$ c'est une éq linéaire en u

de la forme $\underbrace{a(t)}_{1} x' + \underbrace{b(t)}_{(1-r)P(t)} x = \underbrace{d(t)}_{-(1-r)Q(t)}$ on sait la résoudre

mais ce n'est pas fini ! Une fois qu'on a résolu cette éq on a u

mais on cherche x. Pour trouver x on se sert de $u = x^{1-r}$ càd $x = u^{1/(1-r)}$

Exercice : Resoudre $x' = rx(1-\frac{x}{K})$ $r>0, K>0$

$x(0) = 0.1$ equation logistique ou equation de VERHULST

avec $r = K = 1$

Resoudre $x' = x(1-x)$

$\Leftrightarrow x' = x - x^2 \Leftrightarrow x' - x + x^2 = 0$

C'est une edo de Bernoulli avec $P(t) = -1$, $Q(t) = 1$ et $r = 2$

on divise par x^2 : $x' . x^{-2} - x^{1-2} + 1 = 0$ (Car on cherche $x > 0$ ($t \in I \in \mathbb{R}$))

$\Leftrightarrow \underbrace{x' . x^{-2}} - x^{-1} + 1 = 0$

or $(x^{-1})' = -1x^{-2} . x'$

on pose $u = x^{-1}$

$\Leftrightarrow -u' - u + 1 = 0$

$\Leftrightarrow u' + u - 1 = 0$

on multiplie par $e^{\int 1 dt} = \boxed{e^t}$

$(e^t . u)' = e^t \Leftrightarrow e^t u = e^t + K$

$\Leftrightarrow u = 1 + Ke^{-t}$

$\Leftrightarrow u = 1 + \frac{K}{e^t}$

or si $x(0) = 0.1$

$u(t) = \frac{1}{x(t)}$ $u(0) = \frac{1}{0.1} = 10$

$\Rightarrow u(0) = \frac{1}{x(0)}$

$\underbrace{u(0)} = 1 + \frac{K}{e^0}$

$10 = 1 + \frac{K}{1} \Leftrightarrow 9 = K$

donc $u(t) = 1 + \frac{9}{e^t}$

or $u(t) = \frac{1}{x(t)}$ donc $x(t) = \frac{1}{u(t)} = \frac{1}{1 + 9/e^t} = \frac{1}{\frac{e^t + 9}{e^t}} = \frac{e^t}{e^t + 9}$