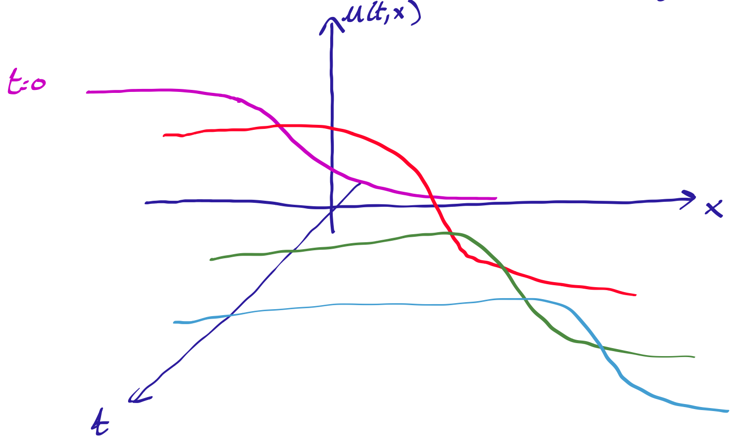
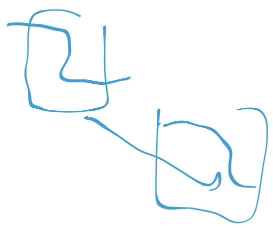
II Ondes de propagation

1. Cas d'une seule équation de réaction-diffusion

On considère l'équation : $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\Delta u(t,x)$ (E)

<u>Définition</u> : une onde de propagation (ou onde progressive, en anglais travelling wave) pour l'équation (E) est une <u>solution particulière</u> de la forme
$u(t,x) = U(x-ct)$ où U est la forme de l'onde et c sa vitesse





Remarque : en général on pose $z = x-ct$ $(z := z(t,x))$

Remarque : dans cette section on étudiera exclusivement des FRONTS D'ONDE

Définition : On suppose que :

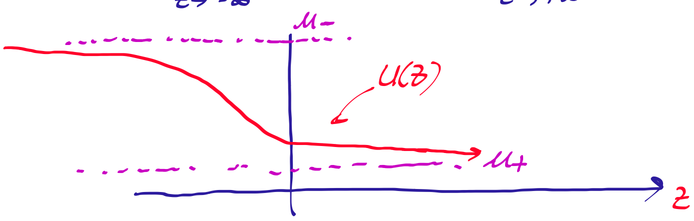
(H_1) $x \in \mathbb{R}$ (cas 1D)

(H_2) f possède au moins deux équilibres qu'on note u_- et u_+

(on conviendra que $u_+ < u_-$)

Alors un front d'onde (ou front de propagation ou wave front) de (E) est un cas particulier d'onde de propagation $u(x-ct)$ avec

$z = x - ct$ $\quad U(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} u_-$ et $U(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} u_+$



Remarque: un front de propagation décrit la façon dont un équilibre envahit l'autre

Les résultats théoriques sont différents suivant la forme de la réaction f

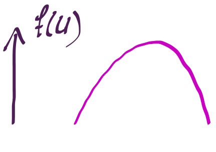
On distingue:

Définition: 1. <u>EQUATION MONOSTABLE:</u>

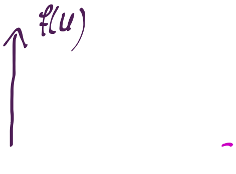
L'équation (E) avec les hypothèses (H_1) et (H_2) vérifiées est dite MONOSTABLE si le plus petit équilibre u_+ est instable

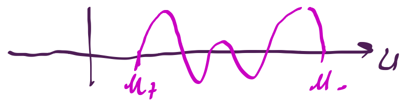
et le plus grand équilibre u_- est stable

c'est à dire $f'(u_+)>0$ et $f'(u_-)<0$



ou

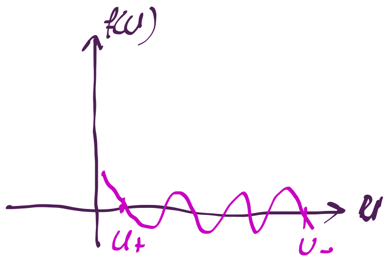




2. EQUATION BISTABLE

L'equation (E) avec les hypothèses (H_1) et (H_2) verifiées est dite BISTABLE si les deux equilibres u_+ et u_- sont stables c'est à dire $f'(u_+)<0$ et $f'(u_-)<0$

ou



Remarque: dans le cas bistable il y a forcément au moins un autre equilibre u_s, compris entre u_+ et u_- avec $f'(u_s)>0$ c.à.d u_s instable

Remarque: l'idée centrale ici permettant l'étude des fronts d'ondes consiste à tirer partie du fait qu'ils ne se déforment pas pour se ramener à une equation différentielle ordinaire.

Méthode : on considère (E) $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) + d\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$ $\quad t \geq 0 \quad x \in I \subset \mathbb{R}$

On pose $U(x-ct) = u(t,x)$

Si on pose $z = x-ct$ $\quad U(z) = u(t,x)$

$z := z(t,x)$

$U(z(t,x))$ tree diagram

$\frac{d}{dz}U = U'(z)$

$\frac{dz}{dt} = \frac{d(x-ct)}{dt} = -c$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)} = \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d}{dz}U(z) = \boxed{-c\,U'(z)}$$

$U(z(t,x))$

$\frac{d}{dz}U = U'(z)$

$\frac{d}{dx}z = \frac{d(x-ct)}{dx} = 1$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 1.\,U'(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 1.\,U''(z)$$

$u(a(t,x), b(t,x))$

$\frac{\partial}{\partial a}u \qquad \frac{\partial}{\partial b}u$

$\frac{da}{dt} \qquad \frac{db}{dt}$

Par conséquent, par le changement de variable l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\,\Delta u(t,x)$$

s'écrit $\boxed{-cU'(z) = f(U(z)) + d\,U''(z)}$: le front d'onde est donc une solution particulière d'edo d'ordre 2.

avec en plus $\lim_{z\to-\infty} U(z) = u_-$ et $\lim_{z\to+\infty} U(z) = u_+$

Exercice : étude de l'équation de FISHER - KOLMOGOROV

(E) $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = u(t,x)\,(1-u(t,x)) + \Delta u(t,x)$ on suppose que u est une population qui se propage donc $u(t,x) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, $x \in \Omega$

1. On pose $z = x - ct$ $(c \in \mathbb{R}^+)$,

   et on pose $U(z) = u(t,x)$

   Écrire l'équation (E) sous forme d'EDO d'ordre 2

2. Est-ce que (E) est monostable ou bistable ?

3. Écrire l'edo d'ordre 2 sous forme d'edo d'ordre 1. Et étudier cette edo (équilibres, stabilité)

4. Peut-on calculer la vitesse c ?

Réponse: ① $\frac{\delta U}{\delta t}(t,x) = -c \cdot U'(z)$

et $\Delta U(t,x) = U''(z)$

L'equation (E) s'écrit alors $-c\,U'(z) = f(U(z)) + U''(z)$

$\Leftrightarrow U''(z) + c\,U'(z) + f(U(z)) = 0$

$\Leftrightarrow U''(z) + c\,U'(z) + U(z)(1-U(z)) = 0$

② Cherchons les équilibre U_0 tel que $U_0(1-U_0) = 0$

$U_0 = 0$ ou $U_0 = 1$

stabilité de $U_0 = 0$	stabilité de $U_0 = 1$
$f(U) = U(1-U)$	$f(U) = 1-2U$
donc $f'(U) = 1-2U$	donc $f'(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ L.A.S
donc $f'(0) = 1 > 0 \rightarrow$ instable	

Par conséquent l'équation (E) est monostable

③ On considère l'EDO $U'' + cU' + U(1-U) = 0$

Pour se ramener à l'ordre 1, on pose $V = U'$

donc $V' = U''$

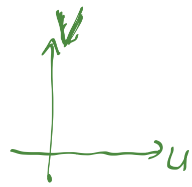
BUT $\Rightarrow \begin{cases} U' = f(U,V) \\ V' = g(U,V) \end{cases}$

$\boxed{V' = g(U,V)}$

or $V' = U'' = -cU' - U(1-U)$

$\qquad = -cV - U(1-U)$

Par consequent l'eq. d'ordre 2 s'écrit $\begin{cases} U' = V \\ V' = -U(1-U) - cV \end{cases}$



On cherche les equilibres :

$$\begin{cases} U' = 0 \\ V' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} V = 0 \\ -U(1-U) - cV = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} V = 0 \\ U = 0 \text{ ou } U = 1 \end{cases}$$

Les equilibres sont donc : $(0,0)$ et $(1,0)$

Soit J la jacobienne du système

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2U-1 & -c \end{pmatrix}$ au point $(0,0)$, on a : $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$

et au point $(1,0)$

et au point $(1,0)$, on a : $J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$

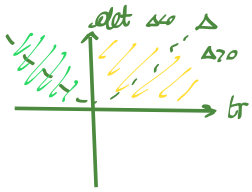
On s'interesse à la stabilité en $(0,0)$:

$tr\, J_{(0,0)} = -c$

et $det\, J_{(0,0)} = 1$

Donc si $c>0$, $(0,0)$ est LAS

si $c<0$, $(0,0)$ est instable



$\Delta = tr^2 - 4\, det = c^2 - 4$

si $c^2-4>0$ on a un noeud

si $c^2-4<0$ on a un foyer.

On s'interesse à la stabilité en $(1,0)$:

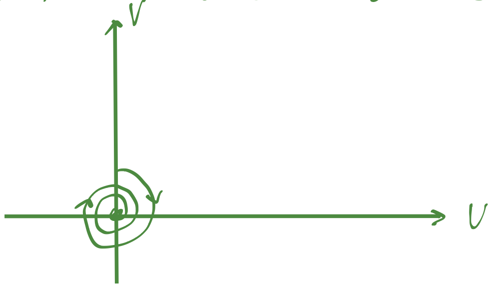
$tr\, J_{(1,0)} = -c$

Donc $\forall c$ on a un point selle. ($(1,0)$ est instable)

et $det_{(1,0)} = -1$

$c>0$

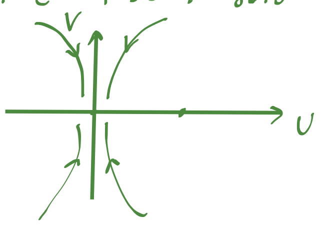
. Si $c^2-4<0$: soit $c^2<4$ donc $c \in [0,2[$

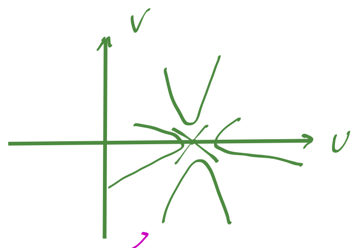


Comme U devient négative, ça n'a pas de sens biologique.

Donc $c \notin [0,2[$

• Si $c^2 - 4 > 0$: soit $c > 2$

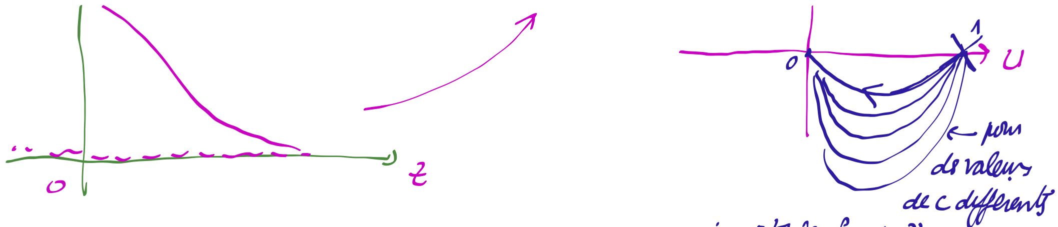




Conclusion : on cherche un front d'onde t.q $U(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} 1 = U_+$

$U(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} 0 = U_-$

$U' < 0$ $(V < 0)$



on aura une infinité de front d'ondes avec une vitesse c

La vitesse minimale étant donnée par la condition

$c^2>4$ cad $\boxed{c>2}$ $(c>0)$