22 septembre 2023

4 BIM
EDP

Référence : JAMES MURRAY
MATHEMATICAL BIOLOGY
vol 1 vol 2

Chapitre 1 : Equations de réaction-diffusion

I Les structures de Turing :

1. Introduction :

Dans un contexte biologique, les équations de réaction-diffusion ont été introduites essentiellement par ALAN TURING en 1952 pour étudier la MORPHOGÈNESE (apparition de formes dans les embryons) au cours de laquelle des formes semblent apparaître "à partir de rien".

Turing a montré que ce type d'emergence de forme peut avoir lieu dans des systèmes "très simples" comme des melanges d'espèces chimiques soumises à de la réaction et de la diffusion

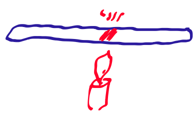
Comment est-ce que ça marche ? Pour ça, étudions d'abord une equation de diffusion simple

2. Une équation de diffusion

L'équation type décrivant le phénomène diffusif est :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \cdot \Delta u(t,x)$$: équation de la chaleur → introduite par <u>FOURIER</u>

u : quantité qui se diffuse



t : temps

x : espace , $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = \overset{\text{ici}}{1}, 2, \text{ ou } 3)$

espace , $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, \text{ou } 3)$

$\frac{\partial}{\partial t}$: dérivée partielle par rapport à t

Δ : opérateur de diffusion appelé LAPLACIEN

. en 1D : $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$

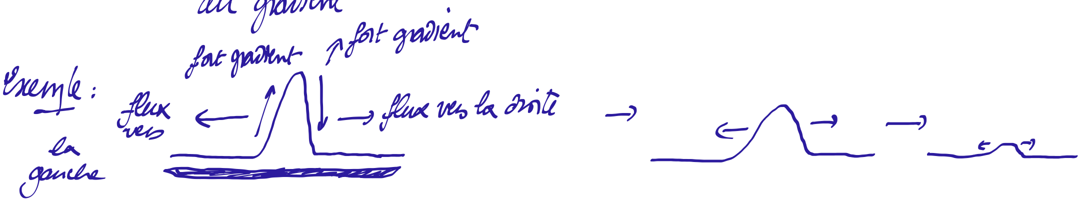
. en 2D $N=2$ $x = \binom{x_1}{x_2}$ $\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x)$

d : $\boxed{d > 0}$ coefficient de diffusion

Phénomène de diffusion:

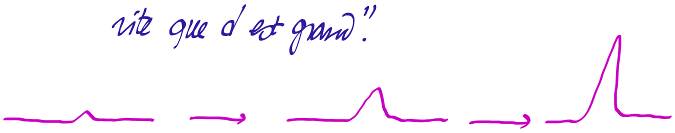
<u>Définition</u> : La diffusion est un phénomène pour lequel le flux est proportionnel au gradient

<u>Exemple</u> :



"la diffusion aplatit les bosses, d'autant plus vite que d est grand".

Question : <u>et si $d < 0$</u> ?
agrégation



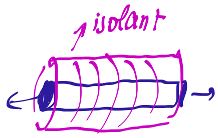
a. Conditions aux limites

<u>en 1D</u> : $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$ en 1D : $x \in [0, L]$

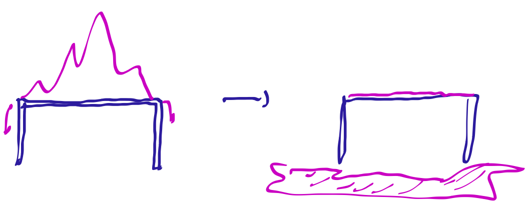
Pour que le problème soit complet, il est nécessaire de préciser :

- une condition initiale : $u(0,x) = f(x)$ donnée (connue), $x \in [0, L]$
- et deux conditions aux bords : en $x = 0$ et en $x = L$

On en choisira 2 classiques ici :



(i) Condition de DIRICHLET homogène

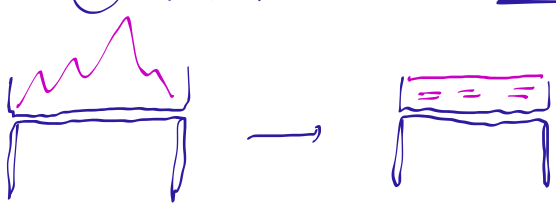


$$u(t,0) = u(t,L) = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$$

(ii) Condition de NEUMANN homogène

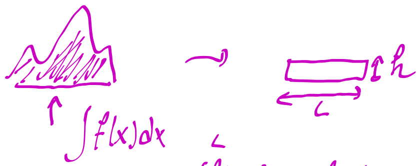
(ii) Condition de NEUMANN homogène



$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L) = 0$$

le flux aux bords est nul

on a alors conservation de la masse:

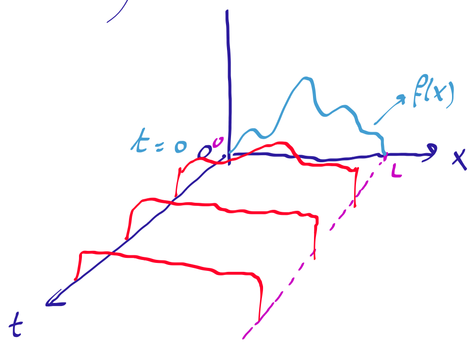


$$\int_0^L f(x)dx = h \cdot L \Rightarrow h = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

Le modèle complet est alors le suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) & t \geq 0,\ x \in [0,L] \\ + \text{condition initiale: } u(0,x) = f(x) & x \in [0,L] \\ + \text{2 conditions aux bords (Dirichlet / Neumann)} & \end{cases}$$

$\uparrow u(t,x)$



Pour résoudre ce type d'équation, on introduit un nouvel outil mathématique : les fonctions propres

b. Les fonctions propres :

Définition : une fonction propre de l'opérateur Δ (avec les conditions aux bords définies) est un "profil spatial" (ou forme) càd : une fonction qui ne dépend que de x : $w : x \longmapsto w(x)$ telle que :

① w est dérivable au moins 2 fois

② w ne peut pas être nulle partout ($w \not\equiv 0$)

③ w vérifie les conditions

③ w vérifie les conditions aux bords

④ $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice: Quelles sont les fonctions propres de Δ associées aux conditions de Dirichlet homogène ?

On cherche w au moins 2 fois dérivable, non identiquement nulle, telle que: $w(0) = w(L) = 0$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ càd (en 1D): $\boxed{w''(x) = \lambda w(x)}$

On cherche les solutions sous la forme e^{rx}

si $w(x) = e^{rx} \Rightarrow w'(x) = re^{rx}$

alors $w''(x) = r^2 e^{rx}$

et donc $w''(x) = \lambda w(x)$ s'écrit $r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx}$ autrement dit: si on simplifie par $e^{rx} > 0$

on obtient $\boxed{r^2 = \lambda}$ $\quad r \in \mathbb{C}$.

CAS 1: $\boxed{\text{si } \lambda > 0}$ on a $r^2 - \lambda = 0$ qui donne $(r - \sqrt{\lambda})(r + \sqrt{\lambda}) = 0$

on a $r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -r_1 = -\sqrt{\lambda}$

on a donc 2 solutions $\left.\begin{array}{l} w_1(x) = e^{r_1 x} \\ w_2(x) = e^{r_2 x} \end{array}\right\}$ tous les $w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$

c_1 et c_2 déterminés par les conditions aux bords

ici $w(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \quad r_1 = -r_2$

$= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{-r_1 x}$

appliquons les conditions aux bords: • $w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0$

$\Leftrightarrow c_1 = -c_2$

$\Leftrightarrow \quad c_1 = -c_2$

donc $w(x) = c_1 e^{r_1 x} - c_1 e^{-r_1 x}$

$= c_1 \left(e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}\right)$

- $w(L) = 0 \Leftrightarrow c_1\left(e^{r_1 L} - e^{-r_1 L}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \longrightarrow \Rightarrow w(x) \equiv 0 \ \underline{\text{PAS POSSIBLE}} \\ \text{ou} \\ e^{r_1 L} = e^{-r_1 L} \rightarrow r_1 L = -r_1 L \end{cases}$

or $r_1 = \sqrt{\lambda} > 0$

$\Rightarrow L = -L$ or $L > 0$

$2L = 0$ $\quad$ PAS POSSIBLE

PAS DE FONCTION PROPRE si $\lambda > 0$

<u>CAS 2</u> : si $\boxed{\lambda = 0}$ dans ce cas $w''(x) = 0$ càd $w'(x) = c_1$

et $w(x) = c_1 x + c_2$

Comme $w(0) = 0$ on a : $c_1 . 0 + c_2 = 0$ donc $\boxed{c_2 = 0}$ Ainsi $\boxed{w(x) = c_1 x}$

et comme $w(L) = 0$ on a $c_1 L = 0$ $\nearrow$ si $c_1 = 0 \Rightarrow w \equiv 0$ PAS POSSIBLE

$\searrow$ si $L = 0$ IMPOSSIBLE CAR $L > 0$

<u>cas 3</u> $\boxed{\lambda < 0}$ dans ce cas on a $r^2 = \lambda = -|\lambda| = i^2 |\lambda|$

donc il y 2 racines complexes $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ ici $\alpha = 0$

$r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$

<u>Rappel</u> : si r est de la forme $\alpha + i\beta$

les solutions sont donc $w(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

Ici $w(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda|}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}\, x\right)$

comme $w(0) = 0$ $\quad c_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} = 0 \Leftrightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

donc $w(x) = c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}\, x\right)$

et $w(L) = 0$ donc $c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}\, L\right) = 0$ $\nearrow$ $c_2 = 0$ PAS POSSIBLE

$\searrow$ $\sin\left(\sqrt{|\lambda|}\, L\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}\, L = k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{|\lambda|}\, L = k\pi \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{|\lambda|}\, L}{\pi} \in \mathbb{N}^*$

$\hookrightarrow |\lambda| L^2 = k^2 \pi^2$

$\hookrightarrow |\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \Rightarrow \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, k \in \mathbb{N}^*$: infinité de valeurs props

et $w(x) = c_2 \sin\left(\underbrace{\frac{k\pi}{L}}_{\sqrt{|\lambda|}} \cdot x\right) \rightarrow$ __Remarque__ on peut prendre $c_2 = 1$

donc $w(x) = \boxed{\sin\left(\frac{k\pi}{L} \cdot x\right)}$ $k \in \mathbb{N}^*$

25 septembre

On montrerait également que pour les conditions de Neumann homogènes les fonctions propres associées au Laplacien sont données par

$$w_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad , \; k \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

Remarque : en fait pour n'importe quelle géométrie (en n'importe quelle dimension) avec toutes les conditions aux bords usuelles, on peut montrer qu'il y a une infinité dénombrable de fonctions y a une infinité dénombrable de fonctions propres que l'on note (w_0), w_1, ..., associées aux valeurs propres (λ_0), λ_1, λ_2, ... qui sont forcément ≤ 0

Par convention on les numérote en commençant par la plus grande

$$\cdots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 \leq 0$$

c. Résolution de l'équation de la chaleur

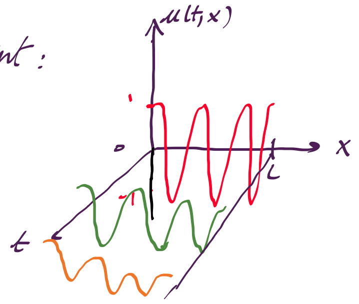
(i) si la condition initiale est une fonction propre :

On considère le système $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d \Delta u(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in [0,L]$

$+ \quad u(0,x) = w_k(x)$, où $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,L]$

$+$ condition au bord

Intuitivement :



$\Delta w_k(x) = \lambda_k w_k(x)$ $\quad \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

Le profil initial sera soit dilaté soit amorti par la diffusion mais la forme initiale ne changera pas (pas d'ajout ni suppression de bosse)

Par conséquent on cherche les solutions sous la forme $u(t,x) = \underbrace{\alpha(t)}_{\text{inconnue}} w_k(x)$

c'est la méthode de séparation des variables

Méthode : On remplace $u(t,x)$ par $\alpha(t)\, w_k(x)$ dans l'équation de la chaleur

on obtient $\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)\, w_k(x)\right) = d \Delta\, \alpha(t)\, w_k(x) \qquad t>0,\ x\in[0,L]$

ce qui donne $w_k(x)\ \alpha'(t) = d\, \alpha(t)\, \Delta w_k(x)$

$= d\, \alpha(t)\, \lambda_k\, w_k(x) \qquad \forall x\in[0,L],\ \forall t\geq 0$

$\Leftrightarrow \qquad \underbrace{w_k(x)}_{\neq 0\ \forall x}\ \left(\alpha'(t) - d\lambda_k\, \alpha(t)\right) = 0 \qquad \forall x\in[0,L],\ \forall t\geq 0$

$\Leftrightarrow \qquad \alpha'(t) - d\lambda_k\, \alpha(t) = 0 \quad$ pour $t\geq 0$

c'est à dire $\alpha'(t) = d\lambda_k\, \alpha(t)$

ainsi $\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{d\lambda_k t} \qquad t\geq 0 \qquad d>0 \quad \lambda_k \leq 0$

Conclusion la solution de l'équation de la chaleur est équation de la chaleur est

$$u(t,x) = \alpha(t)\, u_k(x) = \boxed{\alpha(0)\, e^{d\lambda_k t}\, u_k(x)}$$

enfin si $t=0$ $\quad u(0,x) = \alpha(0)\, e^{0}\, u_k(x) = \alpha(0)\, u_k(x)$

mais $\quad u(0,x) = u_k(x)$ (condition initiale) donc $\boxed{\alpha(0)=1}$

(ii) Si la condition initiale est une combinaison de 2 fonctions propres.

On suppose que $u(0,x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$ avec $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in \mathbb{R}$

Par le principe de superposition, on montrerait que

$$u(t,x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$$

Exercice: On considère l'équation de la chaleur pour $x \in [0,\pi]$ avec les conditions de Neumann homogènes

1. Déterminer les fonctions propres et valeurs propres associées à Δ
2. On suppose que la donnée initiale est $u(0,x) = 3 + 0.1\cos x + 0.1\cos(6x)$
   a. Résoudre l'équation de la chaleur avec $d=1$
   b. Calculer $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$

Réponse: 1. Comme $x \in [0,\pi]$ et que l'on a les conditions de Neumann homogènes

on obtient $\lambda_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$

et $w_k(x) = \cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\pi]$

2. a. $u(0,x) = 3 + 0.1\cos x + 0.1\cos(6x)$

$$= \underbrace{3}_{\alpha_0}\underbrace{\cos(0x)}_{k=0} + \underbrace{0.1}_{\alpha_1}\underbrace{\cos(1.x)}_{k=1} + \underbrace{0.1}_{\alpha_6}\underbrace{\cos(6x)}_{k=6}$$

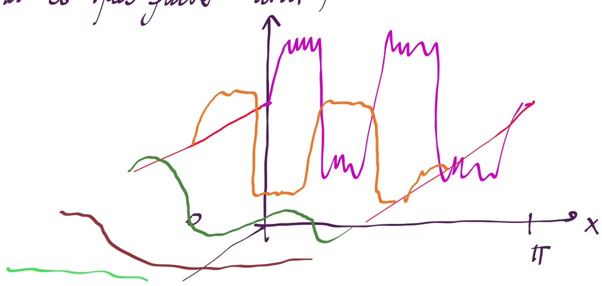
donc $u(t,x) = 3e^{1.\lambda_0 t} w_0(x) + 0.1\, e^{1.\lambda_1 t} w_1(x) + 0.1\, e^{1.\lambda_6 t} w_6(x)$

$= 3e^0 w_0(x) + 0.1 e^{-t} w_1(x) + 0.1 e^{-36t} w_6(x)$

$= 3 + 0.1e^{-t}\cos(x) + 0.1e^{-36t}\cos(6x)$ $x \in [0,\pi]$, $t \geq 0$

b. $\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 3$

Les fréquences les plus hautes (k grand) se lissent plus rapidement que les fréquences les plus faibles



t

(iii) si la condition initiale est "quelconque"

Si la condition initiale est quelconque, on cherche quand même à se ramener à des fonctions propres de la diffusion.

Cette idée est à la base des séries de Fourier

Rapel: Serie de Fourier

Toute fonction f, L-périodique et de carré intégrable sur $[0,L]$ ($x \in [0,L]$; $\int_0^L f^2(x)dx$ existe)

se décompose comme une somme infinie de cosinus et de sinus

de la façon suivante:

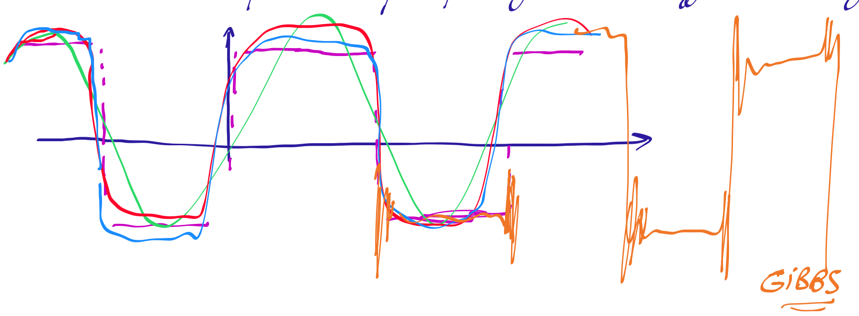
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$$

Les coefficients a_k et b_k sont appelés coefficients de Fourier (on peut les calculer à partir de f)

et cette somme est appelée SÉRIE de FOURIER

Remarques: 1. Les coef. de Fourier d'une fonction f sont définis de manière unique et il existe des formules (à base d'intégrales pour les calculer)

2. Ce resultat est remarquable dans le sens où on aura l'existence de serie de Fourier pour n'importe quelle fonction f "suffisamment regulière"



3. Par conséquent si $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$

avec f de carré intégrable sur $[0,L]$,

on a alors $$u(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

et la solution de l'équation de la chaleur s'écrit

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k e^{-d\lambda_k t} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k e^{-d\lambda_k t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

et la diffusion lisse chaque composante de la condition initiale, d'autant plus vite diffusion lisse chaque composante de la condition initiale, d'autant plus vite que la fréquence de cette composante est grande.

On a vu que la diffusion lisse les profils, il est donc impossible d'avoir une émergence de forme avec l'équation de la chaleur.

On a besoin donc d'avoir un terme de réaction

3. Les systèmes de réaction-diffusion

Un système de 2 équations de réaction-diffusion est de la forme:

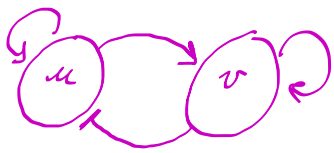
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x), v(t,x)) + d_u \Delta u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = g(u(t,x), v(t,x)) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$

où
- u et v : sont des quantités qui se diffusent
- les coef. de diffusion d_u et d_v peuvent être différents
- les fonctions f et g constituent la partie réaction du modèle.

fonctions f et g constituent la partie réaction du modèle.

C'est le bilan entre la production et la destruction de u et de v au point (t,x)

Exemple :
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = 2u(t,x) - v(t,x) + d_u \Delta u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(t,x) = v(t,x) + \frac{1}{2} u(t,x) + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$



Remarque : dans la théorie de Turing l'émergence de forme est due à la déstabilisation d'un équilibre sans forme (flat).

Par conséquent, notre objectif est d'étudier les équilibres et leur stabilité pour les équations de réaction-diffusion.

a. Cas d'une seule équation de réaction-diffusion

On considère l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\,\Delta u(t,x) \quad , t \geq 0 \quad \text{et } x \in [0, L]$$

(i) Équilibres homogènes :

Définition : un équilibre de la réaction est une valeur u_0 indépendante de t et x (c'est une fonction constante).

Dans ce cas $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = f(u_0) + d\,\Delta u_0$

devient $\underbrace{}_{0} = f(u_0) + 0$: $\boxed{f(u_0) = 0}$

Un équilibre homogène u_0 satisfait $f(u_0) = 0$

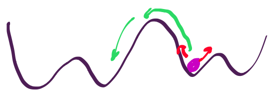
Par sa définition, il n'a pas de forme : il est plat.

(ii) Stabilité

Soit u_0 un équilibre de l'équation $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d\,\Delta u(t,x)$

Pour étudier la stabilité de cet équilibre, on le perturbe.

On pose $u(t,x) = u_0 + \underbrace{u_p(t,x)}_{\text{petite perturbation}}$



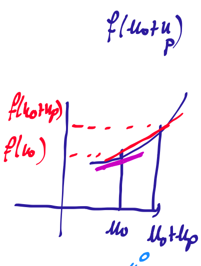
et on remplace dans l'équation :
on obtient :

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_0 + u_p(t,x)\right) = f\left(u_0 + u_p(t,x)\right) + d \, . \, \Delta\left(u_0 + u_p(t,x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} u_0 + \frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = \quad '' \quad + d\left(\Delta u_0 + \Delta u_p(t,x)\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 + \frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = f(u_0 + u_p(t,x)) + d\left(0 + \Delta u_p(t,x)\right)$$



On obtient l'équation de la perturbation:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = f\left(u_0 + u_p(t,x)\right) + d \, \Delta u_p(t,x)$$

$$\simeq f'(u_0) . u_p(t,x) + d \, \Delta u_p(t,x)$$

$$\frac{f(u_0+u_p) - f(u_0)}{u_0 + u_p - u_0} \simeq f'(u_0)$$

$$f(u_0+u_p) \simeq f'(u_0) . u_p$$

La linéarisation du problème consiste à l'écrire sous forme d'égalité:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_p(t,x) = f'(u_0) . u_p(t,x) + d \, \Delta u_p(t,x)$$

On décide de prendre comme perturbation initiale une fonction propre de Δ satisfaisant

On décide de prendre comme perturbation initiale une fonction propre de Δ satisfaisant les conditions aux bords : autrement dit $u_p(0,x) = w_k(x)$ (ou une combinaison linéaire de w_k)

Ainsi, on cherche les solutions de notre équation de perturbation par la méthode de séparation des variables :

Autrement dit on pose : $u_p(t,x) = \alpha(t)\, w_k(x)$

et on remplace dans l'équation :

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)\, w_k(x)\right) = f'(u_0)\,\alpha(t)\, w_k(x) + d\,\Delta\,\alpha(t)\, w_k(x) \qquad t \geq 0 \text{ et } x \in [0, X]$$

w_k fonction propre

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{w_k(x)}\, \alpha'(t) = f'(u_0)\,\alpha(t)\, \cancel{w_k(x)} + d\,\alpha(t).\, \lambda_k \cancel{w_k(x)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha'(t) = \left(f'(u_0) + d\lambda_k\right) \alpha(t)}$$

Ce qui donne $\alpha(t) = \alpha(0)\, e^{(f'(u_0) + d\lambda_k)t}$ on prend $\alpha(0) = 1$

donc si la perturbation initiale est une fonction propre alors

$$u_p(t, x) = \alpha(0)\, e^{(f'(u_0) + d\lambda_k)t}\, w_k(x)$$

et si la perturbation initiale est une combinaison linéaire de fonctions propres :

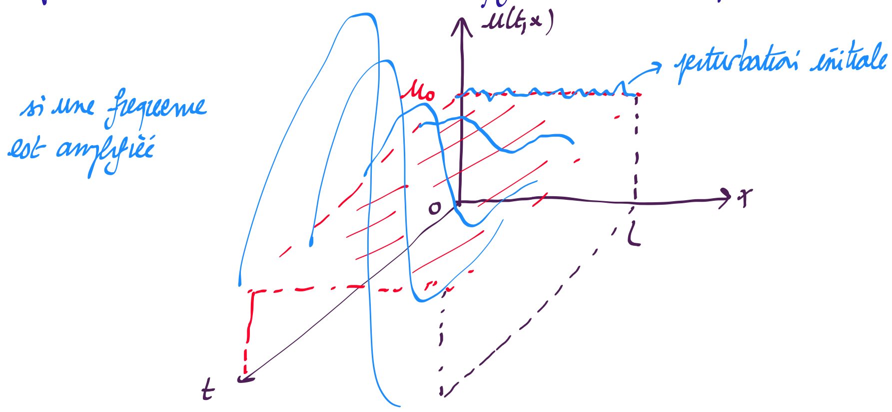
c'est à dire que $u_p(0, x) = \sum_{k=0}^{\tilde{N}} \alpha_k w_k(x)$

alors $u_p(t, x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\, e^{(f'(u_0) + d\lambda_k)t}\, w_k(x)$

et pour que u_0 soit localement asymptotiquement stable (L.A.S.)

il faut que $\lim_{t \to +\infty} u_p(t, x) = 0$ càd $\boxed{f'(u_0) + d\lambda_k < 0}$ pour toutes les fréquences k !!

si pour au moins une fréquence k^* $f'(u_0) + d\lambda_{k^*} > 0$ alors l'équilibre n'est plus stable et la perturbation est amplifiée suivant cet équilibre.



Exercice : Equation de FISHER

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = u(t,x)\left(1 - u(t,x)\right) + 2\Delta u(t,x) \qquad x \in [0,\pi]$$

1. Determiner les equilibres homogenes de cette équation
2. Etudier leur stabilite

2. Étudier leur stabilité.

<u>Réponse</u> 1. Les équilibres u_0 vérifient $f(u_0)=0$ avec $f: u \mapsto u(1-u)$

donc $f(u_0)=0 \iff u_0(1-u_0)=0$

$\iff u_0=0$ ou $u_0=1$

On a donc 2 équilibres homogènes

2. <u>Stabilité de u_0</u> :

(a) pour $\boxed{u_0=0}$

comme $x\in[0,\pi]$: $\lambda_k=-k^2$ et $w_k(x)=\cos(kx)$ <u>$k\in\mathbb{N}$</u> $-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ "π"

donc a-t-on $f'(u_0)+d\lambda_k<0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$?

or $f(u)=u(1-u)$ $u\in\mathbb{R}$ $f(u)=u(1-u)=u\cdot{}^2$

donc $f'(u)=1-2u$

et en $u_0=0$: $\boxed{f'(0)=1}$ Par conséquent $f'(u_0)+d\lambda_k=1+2\cdot(-k^2)$

$=1-2k^2$ <u>$k\in\mathbb{N}$</u>

et $1-2k^2<0 \iff 1<2k^2$

$\iff k^2>\frac{1}{2}$ $k\in\mathbb{N}$

$\iff k>\frac{1}{\sqrt{2}}$ càd $k\in\mathbb{N}^*$

et $>0 \iff$ si $k=0$

La seule fréquence qui déstabilise $u_0=0$ est la fréquence $k=0$, autrement dit une perturbation plate !! On n'aura pas d'émergence de forme (si ce n'est la forme plate).

$\rightarrow$ $w_0(x)=\cos(0.x)=1$.

6. pour $u_0 = 1$

$f'(1) = -1$ donc $f'(u_0) + d\lambda_k = -1 + 2.(-k^2) = -1 - 2k^2 < 0$ $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N}}}$

aucune fréquence ne peut déstabiliser 1.

Dans ce problème la seule fréquence qui déstabilise un équilibre est la fréquence $k=0$ (perturbation $\cos(0.x) = 1$ (perturbation plate) pour l'équilibre $u_0 = 0$

Remarque : c'est un résultat qu'on peut généraliser:

quand on a <u>une seule</u> équation de réaction diffusion, la seule fréquence qui peut déstabiliser un équilibre est la fréquence nulle.

On ne peut pas avoir d'autre émergence de forme autre que la forme plate quand on n'a qu'une seule équation.

Turing a montré qu'il fallait au moins 2 équations pour y arriver

b. Système de 2 équations de réaction-diffusion

On considère le système suivant :

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = f(u,v) + d_u \Delta u \\ \frac{\partial}{\partial t} v = g(u,v) + d_v \Delta v \end{cases}$$

- Écriture sous forme vectorielle : On peut écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}$$

- Les équilibres homogènes $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ vérifient :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}_{0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} f(u_0,v_0) \\ g(u_0,v_0) \end{pmatrix} + \underbrace{D\Delta\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}_{0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} f(u_0,v_0) = 0 \\ \text{et} \\ g(u_0,v_0) = 0 \end{cases}$$

- <u>Stabilité</u> On perturbe les équilibres:

Pour ça on écrit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ est une petite perturbation de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

On remplace alors dans l'équation:

on obtient $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D.\Delta\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}\right)$

ce qui donne: $\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} + D\Delta\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$

Linearisons le probleme:

Rappelons que
$$\begin{pmatrix} f(u_0+u_p, v_0+v_p) \\ g(u_0+u_p, v_0+v_p) \end{pmatrix} \simeq \underbrace{\begin{pmatrix} f(u_0,v_0) \\ g(u_0,v_0) \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u_0,v_0) & \frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u_0,v_0) & \frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}}_{J_{(f,g)}(u_0,v_0)\text{ : matrice Jacobienne}} \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

on la note J

Par consequent, le systeme linearisé s'ecrit:
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = J.\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} + D.\Delta\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$$

- Choix de la perturbation:

on choisit la perturbation initiale sous la forme $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \omega_k(x)$

ou une combinaison lineaire de fonctions propres:

combinaison linéaire de fonctions propres:

Par la méthode de séparation des variables on remplace $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x)$

dans le système linéarisé ceci donne:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) = J.\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) + D.\Delta\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} w_k(x) \quad \Delta w_k = \lambda_k w_k$$

$$\Leftrightarrow \quad \cancel{w_k(x)}\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = J.\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \cancel{w_k(x)} + D\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}.\lambda_k \cancel{w_k(x)}$$

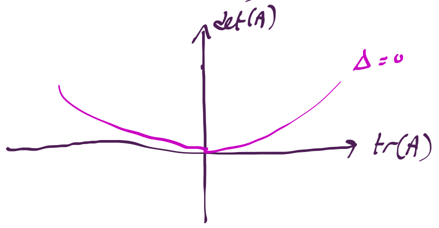
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix} = (J + \lambda_k D)\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$ de la forme $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} e^{(J+\lambda_k D)t}}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} u_p \\ v_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} e^{(J+\lambda_k D)t} \, w_k(x)$ $\quad k \in \mathbb{N}$ $\quad X' = AX$

LAS ← $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ seul équilibre



$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est LAS si et seulement si

$$\begin{cases} tr(J+\lambda_k D) < 0 \\ \text{et} \\ det(J+\lambda_k D) > 0 \end{cases}$$

Turing a montré qu'il existait une condition nécessaire pour espérer avoir la déstabilisation de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cette condition s'appelle : RÈGLE DES SIGNES DE TURING

pour avoir une condition nécessaire (attention, elle n'est pas suffisante)

il faut que la Jacobienne J vérifie la règle des signes suivante :

$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$ $\quad$ les signes sont opposés sur les diagonales

$\begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$

Interprétation :

$$J = \begin{pmatrix} \overset{+}{\frac{\partial}{\partial u} f(u_0, v_0)} & \overset{-}{\frac{\partial}{\partial v} f(u_0, v_0)} \\ \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} g(u_0, v_0)}_{+} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial v} g(u_0, v_0)}_{-} \end{pmatrix}$$

si on a $\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$

il faut que l'on ait un système activateur-inhibiteur

Exercice : 1. Est-ce que le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} u = 2u - v + d_u \Delta u \\ \frac{\partial}{\partial t} v = v + \frac{1}{2} u + d \Delta v \end{cases}$$

est-il activateur-inhibiteur ?

Réponse : $f(u,v) = 2u - v$

$g(u,v) = v + \frac{1}{2} u$

donc $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{-1} \\ \overset{+}{\frac{1}{2}} & \overset{+}{1} \end{pmatrix}$

PAS BON

2. On considère le système

2. On considère le système

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{u^2}{v} - u + d_u \Delta u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = u^2 - 2v + d_v \Delta v \end{cases}$$

MEINHARDT

a. Donner les équilibres de (S)

b. Pour chacun des équilibres a-t-on la règle des signes de Turing vérifiée ?

c. Calculer la stabilité de chacun de ces équilibres sans diffusion

d. On suppose $x \in [0, \pi]$ avec Neumann homogène

On suppose de plus $d_u = \frac{1}{10}$

(i) Déterminer la stabilité de $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ pour $d_v = \frac{1}{10}$

(ii) ——— $d_v = 2/10$

(iii) ——— $d_v = 12/10$

e. Même question que a, b, c, d pour $x \in [0, 2\pi]$

f. ——— $x \in [0, \pi/4]$

Réponse : a. Les équilibres (u_0, v_0) vérifient

Soit $v_0 \neq 0$ alors $\frac{u_0^2}{v_0} - u_0 = 0 \; (1) \iff u_0\left(\frac{u_0}{v_0} - 1\right) = 0 \iff u_0 = 0$ ou $u_0 = v_0$

et $u_0^2 - 2v_0 = 0 \; (2)$

dans (2) :

$u_0 = 0 \longrightarrow 0 - 2v_0 = 0 \iff v_0 = 0$ IMPOSSIBLE

$u_0 = v_0 \longrightarrow v_0^2 - 2v_0 = 0 \iff v_0(v_0 - 2) = 0 \iff \cancel{v_0 = 0}$ ou $v_0 = 2 \Rightarrow u_0 = 2$

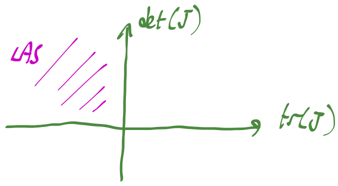
$\iff \cancel{\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ou $\boxed{\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

b. On pose $f(u,v) = \frac{u^2}{v} - u$ et $g(u,v) = u^2 - 2v$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

on pose $$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u}{v} - 1 & -\frac{u^2}{v^2} \\ 2u & -2 \end{pmatrix}$$

en $(u_0, v_0) = (2,2)$ on obtient
$$J = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +4 & -2 \end{pmatrix}$$

La règle des signes de Turing est validée



c. Trace $(J) = -1 < 0$

det $(J) = -2 + 4 = 2 > 0$

$(u_0, v_0) = (2,2)$ est donc L.A.S. quand la diffusion est nulle

d. $x \in [0,\pi]$ + Neumann homogène $\Rightarrow$ les fonctions propres sont $w_k(x) = \cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}$

et les valeurs propres associées sont $\lambda_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$

$\boxed{d_u = \frac{1}{10}}$

Cherchons les fréquences $k \in \mathbb{N}$ qui déstabiliseront l'équilibre $(u_0, v_0) = (2,2)$

Pour ça calculer (i) $J + \lambda_k D$

(ii) $\mathrm{tr}(J + \lambda_k D)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$\det(J + \lambda_k D)$ "

$D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}$

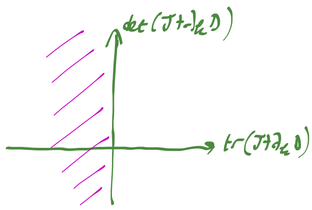
$d_u = \frac{1}{10}$

$d_v \in \mathbb{R}^+$

(i) $J + \lambda_k D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k^2/10 & -1 \\ 4 & -2 - k^2 d_v \end{pmatrix}$

(ii) trace $(J+\lambda_k D) = 1 - \frac{k^2}{10} - 2 - k^2 d_V$

$$= \underbrace{-1}_{<0} \underbrace{- k^2 \underbrace{\left(\frac{1}{10} + d_V\right)}_{>0}}_{<0} < 0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}$$



$$\det(J+\lambda_k D) = -\left(1-\frac{k^2}{10}\right)\left(2+k^2 d_V\right) + 4$$

$$= -\left(2 + k^2 d_V - \frac{2k^2}{10} - \frac{k^4}{10} d_V\right) + 4$$

$$= -2 - k^2 d_V + \frac{2k^2}{10} + \frac{k^4}{10} d_V + 4$$

$$= \frac{d_V}{10} \cdot k^4 + \left(\frac{2}{10} - d_V\right) k^2 + 2$$

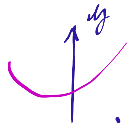
On pose $K = k^2$, $K \in \mathbb{N}$ et K est un carré

l'égalité s'écrit alors

$\frac{d_V}{10} = d_V \cdot \frac{1}{10}$

$$\det(J+\lambda_k D) = \frac{d_V}{10} \cdot K^2 + \left(\frac{2}{10} - d_V\right) K + 2$$

(i) si $\boxed{d_V = \frac{1}{10}}$ $\quad \det(J+\lambda_k D) = \frac{1}{100} K^2 + \frac{1}{10} K + 2$



$\Delta = \left(\frac{1}{10}\right)^2 -$

$$\Delta = \left(\frac{1}{10}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{100} - \frac{8}{100} = -\frac{7}{100} < 0$$

conclusion: pour tout $k \in \mathbb{N}$ (donc $k \in \mathbb{N}$)

$$\det(J + \lambda_k D) > 0$$

et donc pour $d_V = \frac{1}{10}$, $(u_0, v_0) = (2,2)$ sera toujours L.A.S.
on n'aura pas d'emergence de forme

(ii) si $\boxed{d_v = \frac{2}{10}}$ $\quad \det(J+\lambda_k D) = \frac{2}{100}k^2+2 = 2\left(\frac{k^2}{100}+1\right) > 0$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc

u_n $k \in \mathbb{N}$

conclusion : pour $d_v = \frac{2}{10}$ $(u_0, v_0) = (2,2)$ sera toujours L.A.S.

(iii) $\boxed{\text{si } d_v = \frac{12}{10}}$ $\quad \det(J+\lambda_k D) = \frac{12}{100}k^2 + \left(\frac{2}{10} - \frac{12}{10}\right)k + 2$

$$= \frac{12}{100}k^2 - k + 2$$

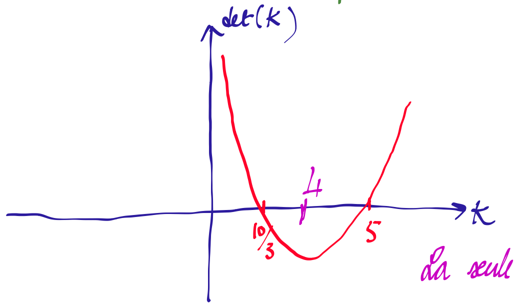
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$\Delta = 1 - 4\cdot\frac{12}{100}\cdot 2 = 1 - \frac{2^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2}{\cancel{2^2}\cdot 5^2} = 1 - \frac{24}{25} = \frac{25-24}{25} = \frac{1}{25} > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{5}$$

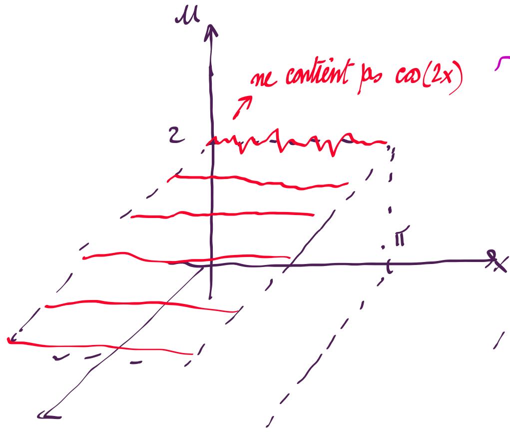
On a donc deux solutions pour $\det(J+\lambda_k D) = 0$ qui sont $k_1 = \frac{1-1/5}{24/100} = \frac{4}{5}\cdot\frac{100}{24} = \frac{2^2\cdot 5\cdot 2^2}{5\cdot 2^3\cdot 3} = \frac{5\cdot 2}{3} = \frac{10}{3} \simeq 3{,}3\ldots$

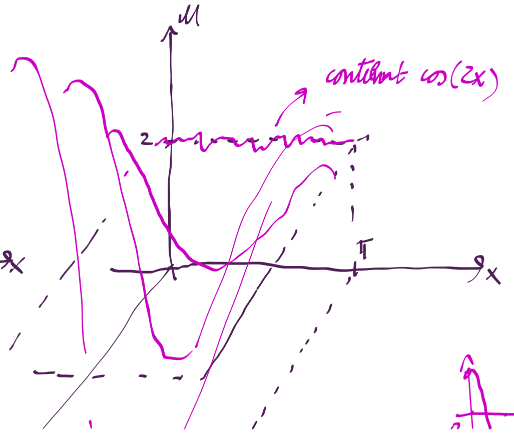
$k_2 = \frac{1+1/5}{24/100} = \frac{6}{5}\times\frac{100}{24} = \frac{6\times 5\times 20}{5\times 6\times 4} = \boxed{5}$

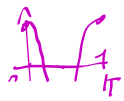


La seule valeur de k ($k \in \mathbb{N}$ et $k = \ell^2$) telle que $\det(J+\lambda_k D) < 0$ est $k = 4$ car $\boxed{\ell = 2}$

Conclusion nous n'avons qu'une seule fréquence qui déstabilise $(u_0, v_0) = (2,2)$ c'est la fréquence 2 et la forme qui émergera sera $\cos(2x)$







t

t