9 octobre 2023.

Construction à la main d'une équation à retard

Ref: eq. à retard
KUANG. Delay differential equations

Hal SMITH.
An introduction to delay diff. equations with applications to the life sciences

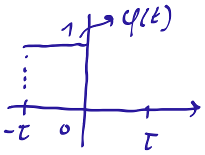
Hal SMITH: $u'(t) = -u(t-\tau) \quad \tau>0$

Rappel: si $\tau=0 \quad u'(t)=-u(t)$

$\Rightarrow u(t) = u(0)e^{-t}$

On suppose ici $\tau>0$ et $u(t)=\varphi(t)=1$ pour $t\in[-\tau,0]$ (condition initiale)

alors $\boxed{\text{sur } [0,\tau]}$



si $t\in[0,\tau]$ alors $t-\tau\in[-\tau,0]$

et alors $\boxed{u'(t)} = -u(t-\tau)$
$= -\varphi(t-\tau)$
$= \boxed{-1}$

Par conséquent: $u(t) = u(0)+\int_0^t(-1)ds = 1-t$ pour $t\in[0,\tau]$

sur $\boxed{[\tau,2\tau]}$ on a $t\in[\tau,2\tau]$ donc $t-\tau\in[0,\tau]$

et donc $u'(t) = -u(t-\tau)$
$= -(1-(t-\tau))$
$= -1+t-\tau$

$\Rightarrow \quad u(t) = 1-t+(1-\tau)^2/2 \qquad t\in[\tau,2\tau]$

$$\Rightarrow \quad u(t) = 1 - t + (1-\tau)^2/2 \qquad t \in [\tau, 2\tau]$$

et de façon générale sur $[(n-1)\tau, n\tau]$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}$$

// si $\tau = 0$ $\quad u(t) = u(0) e^{-t}$

Remarque : . on voit que résoudre "à la main" une équation à retard peut s'avérer très vite très compliqué, même dans le cas linéaire.

. l'idée est donc ici de s'intéresser aux équilibres et à leur stabilité

→ et là, ce sera différent des équations diff. ordinaires

<u>Exemple:</u> On considère l'équation différentielle suivante:

$x'(t) = a\,x(t-1)$ on a $\tau = 1$

. équilibres: Les équilibres sont des solutions stationnaires x^* (indépendants du temps), ils vérifient $x^{*\prime} = 0$ càd ici $a.x^* = 0$

supposons $a \neq 0$, il existe alors un seul équilibre ici $x^* = 0$

. <u>Stabilité</u> Perturbons cet équilibre

On pose $x(t) = x^* + x_p(t)$ où $x_p(t)$ est une "petite perturbation" de x^*

On remplace x par $x^* + x_p$ et l'éq. à retard s'écrit

$$(\underbrace{x^*}_{=0} + x_p(t))' = a\,(\underbrace{x^*}_{=0} + x_p(t-1))' \quad \text{or } x^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_p'(t) = a\,x_p(t-1)$$

et on cherche les conditions telles que $x_p(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ (dans ce cas x^* sera localement asymptotiquement stable)

Méthode : on cherche les solutions sous la forme $x(t) = ce^{\lambda t}$, $c \neq 0$ (c peut être égal à 1)

les solutions seront des combinaisons linéaires de $e^{\lambda t}$ de

en remplaçant on obtient :

$$(ce^{\lambda t})' = a.c.e^{\lambda(t-1)} \qquad \lambda \in \mathbb{C},\ t \geq 0$$

$$\cancel{c}\lambda e^{\lambda t} = a\cancel{c}.\, e^{\lambda t} e^{-\lambda}$$

$$e^{\lambda t}(\lambda - ae^{-\lambda}) = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

$$\iff \boxed{\lambda - ae^{-\lambda} = 0}$$

équation caractéristique de l'équation à retard

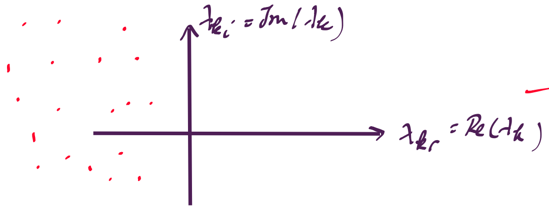
polynôme en λ ; un terme en $e^{-\lambda}$

on appelle cette équation : équation transcendantale

et comme $\lambda \in \mathbb{C}$, le nombre de racines de cette équation peut être infini

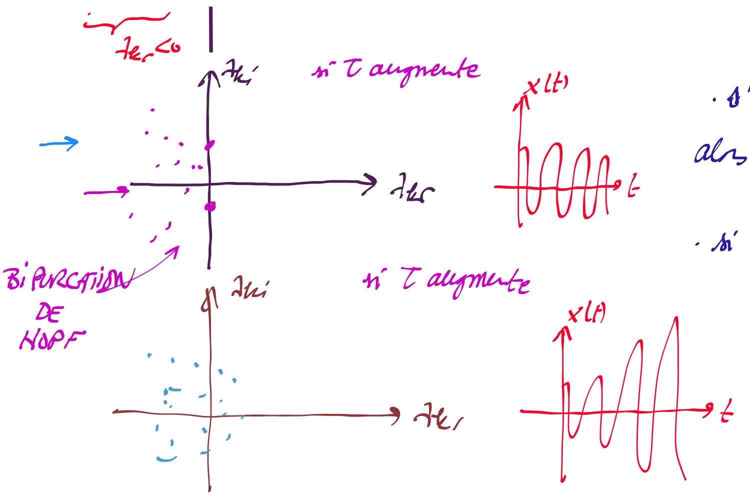
On aurait alors $x_p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{\lambda_k t}$ où $e^{\lambda_k t} = e^{(\lambda_{k_r} + i\lambda_{k_i})t}$

$$= e^{\lambda_{k_r} t} \underbrace{(\cos(\lambda_{k_i} t) + i \sin(\lambda_{k_i} t))}_{\text{borné}}$$



. si $\lambda_{k_r} = Re(\lambda_k) < 0$ pour tout k

alors $x_p(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$: x^* LAS



alors $x_p(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$: X^* LAS

. s'il existe un k t.q. $\lambda_{k_r} > 0$

alors $x_p(t) \not\xrightarrow[+\infty]{} 0$, X^* instable

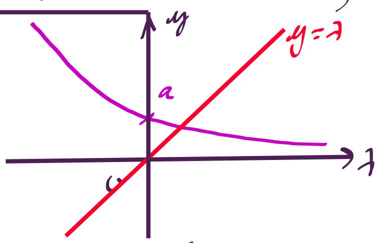
. si $\lambda_{k_r} = 0$: pas de partie réelle

$\Rightarrow$ oscillations

Revenons à l'équation $\lambda - ae^{-\lambda} = 0 \iff \lambda = a e^{-\lambda}$

Cherchons les solutions réelles (existence, unicité (?)) :

CAS ① $\boxed{a > 0}$



$e^{-\lambda} \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} +\infty$

$e^{-\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$

les 2 courbes ne se coupent qu'une seule fois !

et ce sera en $\boxed{\lambda > 0}$

Interprétation : si $a > 0$, il existe une seule solution réelle λ qui est > 0

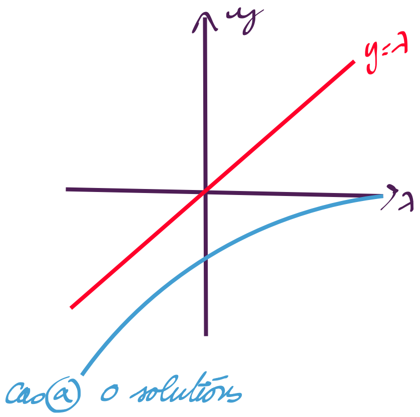
(il peut exister une infinité de $\lambda \in \mathbb{C}$)

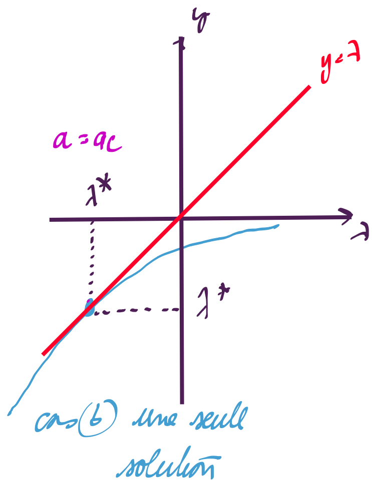
dans tous les cas si $\lambda \in \mathbb{R}$, $Re(\lambda) = \lambda > 0 \Rightarrow$ si $a > 0$

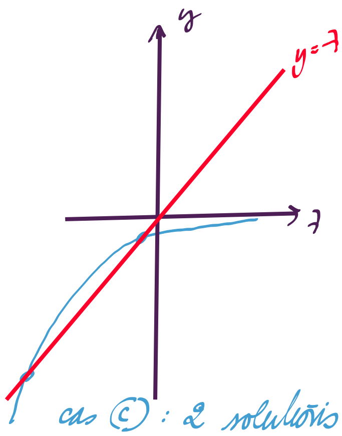
$x_p(t) \not\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

donc si $a > 0$: x^* est INSTABLE

cas $\boxed{2}$ si $\boxed{a<0}$ on a 3 cas :







Interessons nous au cas b, pour trouver le point critique a_c :

les courbes $\mathcal{C}_{y=\lambda}$ et $\mathcal{C}_{y=a_c e^{-\lambda}}$ ont la meme tangente en λ^*

on a donc $\frac{d}{d\lambda}(a_c e^{-\lambda}) = \frac{d}{d\lambda}\lambda = 1$ en λ^*

Autrement dit $-a_c e^{-\lambda^*} = 1 \iff -a_c = e^{\lambda^*}$

$\iff a_c = -e^{\lambda^*} < 0$

Calculons λ^* : le point de tangence se trouve en (λ^*, λ^*) et comme il est aussi sur la courbe $y = a_c e^{-\lambda}$

on a $\lambda^* = a_c e^{-\lambda^*}$ MAIS $a_c = -e^{\lambda^*}$

en remplaçant ça donne $\lambda^* = -e^{\lambda^*} e^{-\lambda^*} = -e^0 = -1$

en remplaçant ça donne $\lambda^* = -e^{\lambda^*} e^{-\lambda^*} = -e^0 = -1$

Conclusion $\boxed{\lambda^* = -1}$ et $\boxed{a_c} = -e^{-1} = \boxed{-\frac{1}{e}}$

Pour résumer on a 3 cas :

si
- $a < a_c = \frac{-1}{e}$ on est dans le cas ⓐ : aucune valeur propre réelle
- $a = a_c = \frac{-1}{e}$ on a une seule valeur propre réelle $\boxed{\lambda = -1}$
- $a_c < a < 0$ on a 2 valeurs propres réelles < 0

Étape 2 : cherchons les valeurs propres complexes

On suppose que $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ où $\lambda_r = Re(\lambda)$ et $\lambda_i = Im(\lambda)$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$\lambda = a e^{-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_r + i\lambda_i = a e^{-(\lambda_r + i\lambda_i)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_r + i\lambda_i = a e^{-\lambda_r} e^{-i\lambda_i}$$

$$= a e^{-\lambda_r}\left(\cos(-\lambda_i) + i\sin(-\lambda_i)\right)$$

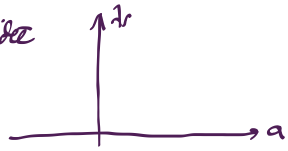
$$= a e^{-\lambda_r}\left(\cos(\lambda_i) - i\sin(\lambda_i)\right)$$

$$\lambda_r + i\lambda_i = a e^{-\lambda_r}\cos(\lambda_i) - i a e^{-\lambda_r}\sin\lambda_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_r = a e^{-\lambda_r}\cos(\lambda_i) & ① \\ \lambda_i = -a e^{-\lambda_r}\sin(\lambda_i) & ② \end{cases} \quad (\lambda_i \neq 0) \quad \lambda_i \neq k\pi$$

λ_r, λ_i, a

idée



méthode : exprimer λ_r en fonction de λ_i :

– exprimer λ_r en fonction de λ_i :

on divise : $\frac{①}{②}$: $\frac{\lambda_r}{\lambda_i} = -\frac{\cos(\lambda_i)}{\sin(\lambda_i)} = -\mathrm{cotan}(\lambda_i)$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_r = -\lambda_i\,\mathrm{cotan}(\lambda_i)} = f(\lambda_i) \quad (*)$$

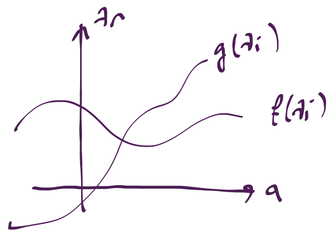
pour a : écrivons a en fonction de λ_i :

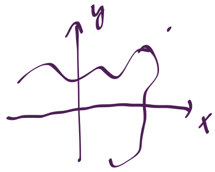
$$\lambda_i = -a\,e^{-\lambda_r}\sin(\lambda_i)$$

$$\Rightarrow a\,e^{-\lambda_r}\sin(\lambda_i) = -\lambda_i$$

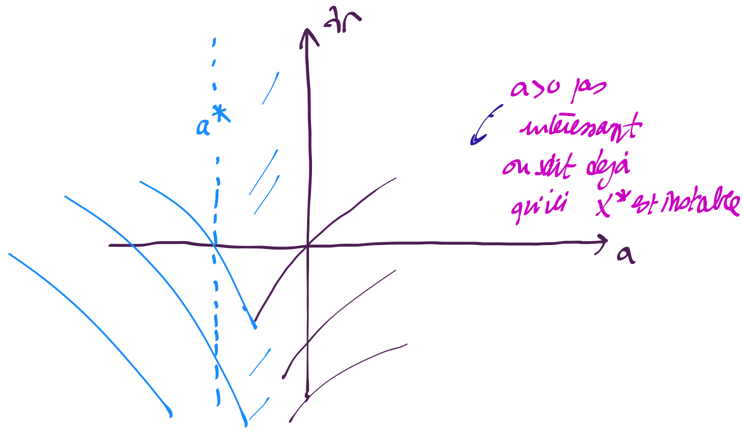
$$\Rightarrow a = -\lambda_i e^{\lambda_r}/\sin(\lambda_i) \overset{(*)}{=} -\lambda_i e^{(-\lambda_i \mathrm{cotan}(\lambda_i))}/\sin(\lambda_i) = g(\lambda_i)$$

$$\begin{cases} \lambda_r = -\lambda_i\,\mathrm{cotan}(\lambda_i) = f(\lambda_i) \\ a = -\lambda_i\,e^{\lambda_r}\sin(\lambda_i) = g(\lambda_i) \end{cases}$$





$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$



cherchons a^* tel que $\lambda_r < 0$: on voit que c'est le cas si $a \in]a^*; 0[$

cherchons la plus grande valeur de a t.q. $\lambda_r = 0$

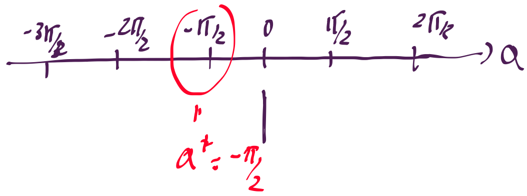
si $\lambda_r = 0$ on a : $\underbrace{\lambda_r}_{=0} = \underbrace{a}_{<0}\underbrace{e^{-\lambda_r}}_{=1}\cos(\lambda_i) \Rightarrow \cos(\lambda_i) = 0$

Autrement dit $\lambda_i = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

et comme $\lambda_i = -a\sin(\lambda_i)$ si $\lambda_i = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi$ $\sin(\lambda_i) = \pm 1$

$$\Rightarrow \lambda_i = \pm a$$

$\Rightarrow \quad a = \pm \pi/2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



Conclusion : si $a \in \left]-\pi/2, 0\right[$: toutes les parties réels $\lambda_r < 0 \Rightarrow x_p(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow x^*$ est LAS.

Théorème : HAYES

On considère l'équation à retard linéaire suivante
$$x'(t) = -Ax(t) - Bx(t-\tau)$$
et l'éq. caractéristique associée : $\lambda + A + Be^{-\lambda\tau} = 0$ soit x^* un équilibre

① si $B \leq 0$ x^* est . asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$ si $A+B>0$
. instable pour tout $\tau \geq 0$ si $A+B<0$

② si $B>0$ x^* est A.S. pour tout $\tau \geq 0$ si $A>B$
instable " " si $A+B<0$

③ si $B>0$ et $B>|A|$ alors x^* est A.S. pour $\tau \in [0, \tau^*[$
x^* instable pour $\tau \geq \tau^*$
où $\tau^* = \frac{1}{\sqrt{B^2-A^2}} \arccos\left(-\frac{A}{B}\right)$

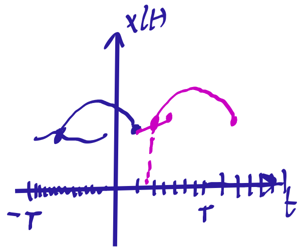
lorsque $\tau = \tau^*$ on a une BIFURCATION DE HOPF.

$\sqrt{B^2 - A^2}$

9 octobre 2023.

Equations à retard : simulations numériques

solveur MATLAB : DDE23



Exercice 4 :