6 octobre 2023

Exercice 1. On considère un problème de réaction diffusion sur $[0,L]$ $(L>0)$ présentant les conditions aux bords suivantes

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,0)=0 \quad \text{et} \quad u(t,L)=0$$

(Neumann en $x=0$ et Dirichlet en $x=L$)

1. Déterminer l'expression des fonctions propres et valeurs propres associées
2. On suppose que l'équation est
$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta u(t,x)$$

a. Que vaut la solution si la condition initiale est une fonction propre?

soit $x\in[0,2]$ b. " " " est $f(x) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right)+21\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)$

c. Dans ce dernier cas, que vaut $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$?

Réponse : 1. On cherche u au moins 2 fois dérivable, non identiquement nulle telle que:

$u'(0)=0$ et $u(L)=0$ et il existe un $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\Delta u(x)=\lambda u(x)$ cad (en 1D) : $u''(x)=\lambda u(x)$.

On cherche les solutions sous la forme e^{rx}.

$u(x)=e^{rx} \Rightarrow u'(x)=re^{rx} \Rightarrow u''(x)=r^2e^{rx}$

Et donc $u''(x)=\lambda u(x)$ s'écrit $r^2e^{rx}=\lambda e^{rx} \Rightarrow r^2=\lambda$

$\lambda\in\mathbb{R}$; $r\in\mathbb{C}$ car $r\in\mathbb{C}$

Cas 1

- $\lambda>0$: On a $r^2-\lambda=0 \Leftrightarrow (r-\sqrt{\lambda})(r+\sqrt{\lambda})=0 \Rightarrow r_1=\sqrt{\lambda}$, $r_2=-\sqrt{\lambda}=-r_1$

On a 2 solutions : $\begin{cases} u_1(x)=e^{r_1x} \\ u(x)=e^{r_2x}\end{cases}$

$w(x) = c_1 w_1(x) + c_2 w_2(x)$

$\hookrightarrow w'(x) = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}$ d'où $w'(0) = c_1 r_1 - c_2 r_1 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{r_1}_{\neq 0} (c_1 - c_2) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2$

car $\lambda > 0$

$\hookrightarrow w(L) = \underbrace{c_1 r_1}_{\neq 0} (e^{r_1 L} - e^{-r_1 L}) = 0$

donc $e^{r_1 L} = e^{-r_1 L}$

$\Leftrightarrow r_1 L = - r_1 L$ Impossible ($\lambda > 0$; $L > 0$)

Donc il n'existe pas de fonction propre pour $\lambda > 0$.

Cas 2 : $\lambda = 0$ donc $r^2 = 0$

On a donc $w''(x) = 0$ soit $w'(x) = c_1$ d'où $w(x) = c_1 x + c_2$.

D'après les conditions aux bords :

$w'(0) = 0 \iff c_1 = 0$

donc $w(x) = c_2$

et de plus, $w(L) = 0 \iff c_2 = 0$

Ici on a c_1 et c_2 sont nulle donc il n'y a pas de solution pour $\lambda = 0$.

CAS 3 $\lambda < 0 \Rightarrow r^2 = \lambda = -|\lambda| = i^2|\lambda|$

deux solutions : $r_1 = -i\sqrt{|\lambda|}$
$r_2 = i\sqrt{|\lambda|}$

on aura $w(x)$ de la forme : $w(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|} x)$

on prend les conditions aux bords :

1) $w'(0) = 0$: $w'(x) = -c_1 \sqrt{|\lambda|} \sin(\sqrt{|\lambda|} x) + c_2 \sqrt{|\lambda|} \cos(\sqrt{|\lambda|} x)$

$\Leftrightarrow w'(0) = 0 + c_2 \sqrt{|\lambda|}$

$\Leftrightarrow c_2 \sqrt{|\lambda|} = 0$ donc $c_2 = 0$

donc $w(x) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} x)$

2) $w(L) = 0$: $w(L) = c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|} L)$

$= 0$ donc $c_1 = 0$ impossible car fct propre

donc $\cos(\sqrt{|\lambda|} L) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{|\lambda|} L = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

on isole λ : $|\lambda| = \left[\left(\frac{2k+1}{L}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2$

$\rightarrow k = \frac{2\sqrt{|\lambda|} L \pi}{2} - \frac{1}{2}$

$\lambda = -\left[\left(\frac{2k+1}{L}\right)\frac{\pi}{2}\right]^2$

$k \geq 0$

$k \in \mathbb{N}$

donc $w(x) = c_1 \cos\left(\left(\frac{2k+1}{L}\right)\frac{\pi}{2} x\right)$ $k \in \mathbb{N}$

définie à une constante près

définie à une constante près

donc $\boxed{w(x) = \cos\left(\left(\frac{2k+1}{L}\right)\frac{\pi}{2}x\right)}$ $k \in \mathbb{N}$

2) a) La condition initiale est une fonction propre.

On a donc le système suivant :

$$(E)\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \Delta u(t,x) & (t \geq 0)\\ u(0,x) = \omega_k(x) & x \in [0,L]\end{cases}$$

Conditions aux bords :

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = 0\\ u(t,L) = 0\end{cases}$$

On cherche les solutions de la forme $u(t,x) = \alpha(t)\cdot\omega_k(x)$

On remplace dans (E) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)\cdot\omega_k(x)\right) = \Delta\left(\alpha(t)\cdot\omega_k(x)\right)$$

$$\omega_k(x)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) = \alpha(t)\cdot\Delta\omega_k(x)$$

$$\omega_k(x)\cdot\alpha'(t) = \alpha(t)\,\lambda_k\,\omega_k(x)$$

$$\alpha'(t) = \alpha(t)\cdot\lambda_k$$

On a donc la forme : $\alpha(t) = Ke^{\lambda_k t}$

D'où : $u(t,x) = Ke^{\lambda_k t}\cdot\omega_k(x)$ ($K=1$ car $u(0,x) = \omega_k(x)$)

On a finalement :

$$u(t,x) = e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{2L}\right)^2 t}\cdot\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2L}x\right)$$

b) La condition initiale est $f(x) = \underbrace{2}_{\alpha_{k_1}}\cos\left(\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\pi}{4},\ k_1=1}x\right) + \underbrace{21}_{\alpha_{k_2}}\cos\left(\underbrace{\frac{5\pi}{4}}_{\frac{\pi}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{5\pi}{4},\ k=2}x\right)$ $L=2$

La solution est de la forme : $u(t,x) = \alpha_{k_1}e^{\lambda_{k_1}t}w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2}e^{\lambda_{k_2}t}$

$$= 2e^{-\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{3}{2}x\right) + 21e^{-\frac{\pi^2}{4}\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{5}{2}x\right)$$

$$= 2e^{-\frac{9\pi^2}{16}t}\cos\left(\frac{3\pi}{4}x\right) + 21e^{-\frac{25\pi^2}{16}t}\cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)$$

c) donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(t,x) = 0$

Exercice 2. On considère le système suivant

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = u^2 v - u + d_u \Delta u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 2 - u^2 v + d_v \Delta v\end{cases}$$

où d_u et d_v sont >0

1. Determiner les equilibres homogènes de (S)
2. Calculer la matrice Jacobienne J de la partie reaction en (u,v) puis aux points d'equilibre
3. Est-ce que la règle des signes de Turing est vérifiée ?
4. Supposons $d_u = d_v = 0$. Determiner la stabilité des equilibres.
5. On suppose $x \in [0, \pi]$ avec les conditions de Neumann homogènes
   a. On suppose $d_u = \frac{1}{10}$ et $d_v = 2$
   Etudier la stabilité des equilibres.
   b. On suppose maintenant $d_v = \frac{24}{10}$
   Existe-t-il au moins une frequence k qui destabilise le ou les equilibres
   c. Tracer cette destabilisation dans le cas où la condition initiale est une perturbation de l'equilibre contenant au moins une de ces frequences.

Réponse : 1.

On considère le système

$$(S)\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = u^2 v - u + d_u \Delta u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 2 - u^2 v + d_v \Delta v\end{cases}$$

Les equilibres vérifient

$$\begin{cases} (1)\ u^2 v - u = 0 \\ (2)\ 2 - u^2 v = 0\end{cases}$$

$(1) \Rightarrow u(uv-1) = 0$

$\Rightarrow u = 0$ ou $uv = 1$

Si $u = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 2 = 0$ ↯

Ainsi reste $uv = 1$

Et Donc $2 - u^2 v = 0 \Leftrightarrow 2 - u = 0 \Leftrightarrow u = 2$

Et $v = \frac{1}{u} = \frac{1}{2}$

Conclusion le système admet un seul equilibre : $(2, \frac{1}{2})$

2. On a : $f(u,v) = u^2 v - u$
$g(u,v) = 2 - u^2 v$

ainsi la Jacobienne J s'écrit

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} f(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) & \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv - 1 & u^2 \\ -2uv & -u^2 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre on a :

$$J(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. les signes sur les diagonales sont opposés, donc la règle des signes de Turing est respectées

4. $d_u = d_v = 0$

$\det(J(u_0,v_0)) = -4 - (-8) = 4 > 0$

$tr(J(u_0,v_0)) = 1 - 4 = -3 < 0$

equilibre est LAS.

Exercice 3. On considère le problème suivant

$$\frac{\partial}{\partial t} u = f(u) + \Delta u \quad \text{où } f: x \mapsto rx\left(1-\frac{x}{q}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \qquad r,q>0$$

1. Etude des equilibres homogènes: determiner le ou les equilibre de ce problème
   On considerera le cas ensuite où il y a 4 equilibres
2. Par un changement de variable, ecrire cette equation sous forme d'edo d'ordre 2

3. Écrire cette eqn sous la forme d'un système d'eqn d'ordre 1

4. Étudier la nature (stable, instable) et le type (nœud, foyer, point selle...) des équilibres de ce système.

On suppose que u représente une population d'insecte. Que peut-on en déduire sur le type des équilibres ?

5. On cherche des fronts monotones décroissants, donner des conditions éventuelles sur la vitesse pour avoir l'existence de ces fronts.

(JAMES MURRAY, vol. I
BUDWORM OUTBREAK)