TD1 25 septembre

<u>Exercice</u> : définir les fonctions propres du Laplacien pour $x \in [0, L]$ en considérant :

. Dirichlet en $x=0$

. Neumann en $x=L$

<u>Réponse</u> : – On cherche u au moins 2 fois dérivable, non identiquement nulle telle que $u(0)=0$ et $\frac{\partial}{\partial x} u(L)=0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Delta u(x) = \lambda u(x)$$

– On cherche les solutions de la forme e^{rx}, $r \in \mathbb{C}$ d'où

$u(x) = e^{rx} \Rightarrow u'(x) = re^{rx} \Rightarrow u''(x) = r^2 e^{rx}$

Donc $u''(x) = \lambda u(x)$ s'écrit $r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx} \Leftrightarrow (r^2 - \lambda) e^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow r^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow r^2 = \lambda \quad \forall x \in [0, L]$

* Cas n°1 : $\lambda > 0$: $r^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow (r - \sqrt{\lambda})(r + \sqrt{\lambda}) = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -\sqrt{\lambda} = -r_1$

On a 2 solutions $\begin{cases} u_1(x) = e^{r_1 x} \\ u_2(x) = e^{r_2 x} \end{cases}$

D'où $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- $u(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -c_2$

D'où $u(x) = c_1 (e^{r_1 x} - e^{-r_1 x})$

On a donc $u'(x) = c_1 (r_1 e^{r_1 x} + r_1 e^{-r_1 x})$

$= c_1 r_1 (e^{r_1 x} + e^{-r_1 x})$

- $u'(L) = 0 \Leftrightarrow c_1 r_1 (e^{r_1 L} + e^{-r_1 L}) = 0$

$\Leftrightarrow c_1 = 0$ ou $r_1 = 0$ ou $e^{r_1 L} + e^{-r_1 L} = 0$

↳ Si $c_1 = 0$ on a $u(x) \equiv 0 \Rightarrow$ Impossible

↳ Si $c_1 = 0$ on a $w(x) \equiv 0 \Rightarrow$ Impossible

↳ $r_1 = \sqrt{\lambda} > 0$ Impossible

↳ $e^{r_1 L} + e^{-r_1 L} = 0 \Leftrightarrow e^{r_1 L} = - e^{-r_1 L}$

$\Leftrightarrow e^{r_1 L} = - \dfrac{1}{e^{r_1 L}}$

$\Leftrightarrow e^{2 r_1 L} = -1$ Impossible.

Il n'y a pas de fonction propre pour $\lambda > 0$.

<u>CAS 2</u> : $\lambda = 0 \Leftrightarrow w''(x) = 0 \quad \forall x \in [0, L]$

donc $w'(x) = C_1$

$w(x) = C_1 x + C_2$

Dirichlet en $x=0$: $w(0)=0$

$\Leftrightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$

$\Leftrightarrow c_2 = 0$

donc $w(x) = c_1 x$

Neumann en $x=L$: $w'(L) = 0$

$c_1 = 0$

$\hookrightarrow$ impossible car w fonction propre

$\hookrightarrow$ pas de solution pour ce cas $\lambda = 0$

<u>Cas 3 :</u> $\lambda < 0$

On a $\omega''(x) = \lambda\omega(x)$ et $r^2 = \lambda = -|\lambda| = i^2|\lambda|$

On a donc 2 solutions de la forme $\alpha + i\beta$ avec :

$\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$.

Les solutions sont donc $\omega(x) = c_1 \cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

Condition de Dirichlet : $\omega(0) = c_1\cos(0) + c_2\sin(0) = 0 \longrightarrow c_1 = 0$

donc : $\omega(x) = c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

$\omega'(x) = c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(x\sqrt{|\lambda|})$

Condition de Neumann : $\omega'(L) = c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$

soit $c_2 = 0$ impossible

soit $\cos(L\sqrt{|\lambda|}) = 0 \iff L\sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\iff \sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi + 2k\pi}{2L}$

$\iff |\lambda| = \left(\frac{\pi + 2k\pi}{2L}\right)^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\implies \lambda = -\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2L}\right)^2$

On a donc la fonction propre :

$\omega(x) = c_2 \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2L} \cdot x\right)$