

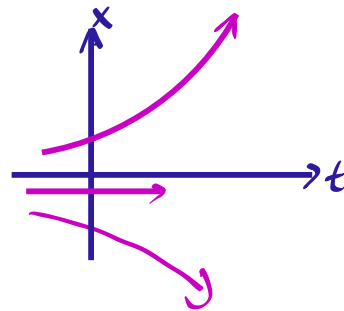
. 22 octobre 2025

cours 3: Rappel: les eds autonomes scalaire de la forme

$$x'(t) = f(x(t))$$

avec f continue ont pour solutions

- soit des constantes
- soit des fonctions monotones



Mauvaise nouvelle: dans la plus grande majorité des cas, on ne peut pas résoudre d'eds de type

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (\text{cas non autonome})$$

$$\text{ou } x'(t) = f(x(t)) \quad (\text{cas autonome})$$

5. Etude qualitative des EDO autonomes

Dimension 1: on s'intéresse ici aux EDO de la forme

$$x' = f(x) \text{ où } x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

et $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

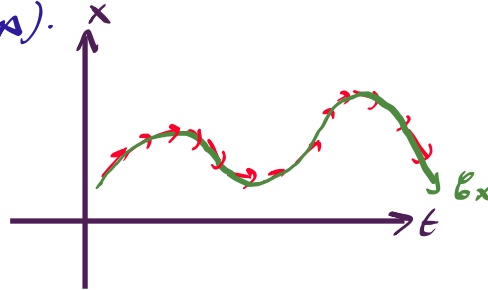
avec f qui vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz
(pour avoir l'existence et l'unicité).

a. Construction graphique des solutions:

Comme dans la grande majorité des cas il n'est pas possible de résoudre ces EDO
on fait appel à l'étude QUALITATIVE des solutions $\rightarrow$ on va étudier
comment se comportent les solutions "en temps long" (c'est à dire quand $t \rightarrow +\infty$)

comportent les solutions en temps long (c'est à dire quand $t \rightarrow +\infty$)
Avant ça, nous allons montrer comment construire graphiquement ces solutions
(sans connaître leur forme explicite).

Pour faire la construction graphique nous avons besoin de connaître les
tangentes (en tout temps).



Exemple (CAS NON AUTONOME) On considère l'edo $x'(t) = t$ (*) ordre 1, PAS AUTONOME linéaire, sous forme normale

Comment dessiner l'allure de ces solutions?

étape 1: on recherche les courbes qui ont la même pente k ($k \in \mathbb{R}$)

c'est à dire les solutions de l'équation $x'(t) = k$
 ↑ pente de la tangente à $\mathcal{C}_x$ en $(t, x(t))$

ou ici $x'(t) = t$ (*)

Par conséquent $x'(t) = k \Leftrightarrow t = k$, $k \in \mathbb{R}$, donc pour chaque pente k donnée on peut trouver une courbe d'équation $t = k$ sur laquelle toutes les solutions de $x'(t) = t$ auront la même pente k

$k=0$ (pente nulle) $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t=0$ —

$k=1$ (pente 1) $x'(t) = 1 \Leftrightarrow t=1$ —

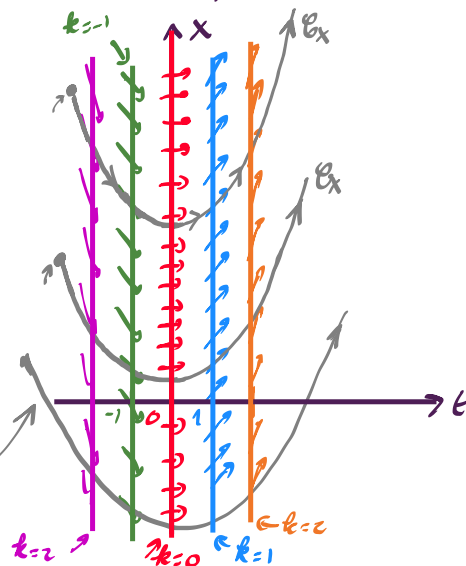
$k=-1$ (" -1) $x'(t) = -1 \Leftrightarrow t=-1$ —

$k=2$ (" 2) $x'(t) = 2 \Leftrightarrow t=2$ —

$k=-2$ (" -2) $x'(t) = -2 \Leftrightarrow t=-2$ —

Rappel: on rappelle que les solutions de $x'(t) = t$

sont $x(t) = \frac{t^2}{2} + C$



Définition: on appelle isocline- k ("de même pente k ") de l'edo $x'(t) = f(t, x(t))$ l'ensemble des points du plan tel que $x'(t) = k$ c'est à dire $f(t, x(t)) = k$

Attention: en général une isocline n'est une solution d'edo.

Exemple: Déterminer l'allure des solutions de l'edo $x'(t) = x^2(t) - t$ (pour simplifier on écrit $x' = x^2 - t$) en se servant des isoclines- k de cette edo.

Solution: Les isoclines- k de $x' = x^2 - t$ sont solutions de $x' = k$ ($k \in \mathbb{R}$) c'est à dire $x^2 - t = k \rightarrow$ à dessein
↳ isoler x en fonction de t



Isoler x en fonction de t :

$x^2 - t = k \Leftrightarrow x^2 = t + k \Rightarrow$ pour k donné dans $\mathbb{R}$, il faut s'assurer que $t+k \geq 0$ c'est-à-dire que $t \geq -k$

si $t \geq -k$ $x = \pm \sqrt{t+k}$

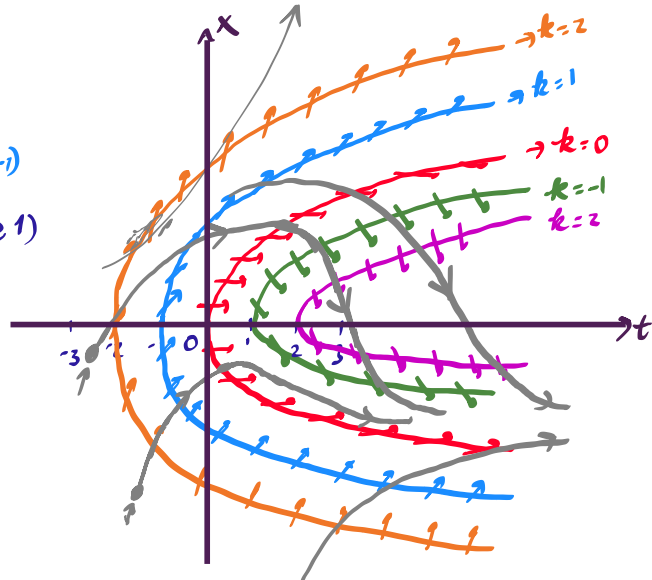
$k=0$ $x'=0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t}$ - ($t \geq 0$)

$k=1$ $x'=1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t+1}$ - ($t \geq -1$)

$k=-1$ $x'=-1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t-1}$ - ($t \geq 1$)

$k=2$ $x'=2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t+2}$ ($t \geq -2$) -

$k=-2$ $x'=-2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{t-2}$ ($t \geq 2$) -



Exemple : Déterminer l'ensemble des solutions de l'EDO : $x' = x(1-x)$

→ équation autonome (ordre 1, non linéaire, sous forme normale)

Solution : les isoclines -k de l'EDO autonome $x' = x(1-x)$ vérifient

$$x' = k \text{ c\`ad } \boxed{x(1-x) = k} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

↑ à résoudre

$$x(1-x) = k \Leftrightarrow x - x^2 = k$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - x + k = 0} \text{ polynôme de degré 2 en } x$$

$$\Delta = 1 - 4k$$

si $\boxed{\Delta < 0}$ c\`ad $1 - 4k < 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{4} < k} \rightarrow$ PAS DE SOLUTION $\Rightarrow$ PAS D'ISOCLINE

si $\boxed{\Delta = 0}$ c\`ad $1 - 4k = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}} \rightarrow$ 1 seule solution $\boxed{x = \frac{1}{2}} \Rightarrow$ UNE SEULE ISOCLINE

si $\boxed{\Delta > 0}$ c\`ad $1 - 4k > 0 \Leftrightarrow \boxed{k < \frac{1}{4}} \Rightarrow$ 2 solutions $x_1 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$
2 isoclines (symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$)

isoclines

$$\boxed{x' = x(1-x)} \text{ EDO}$$

$k > \frac{1}{4}$ PAS D'ISOCLINE

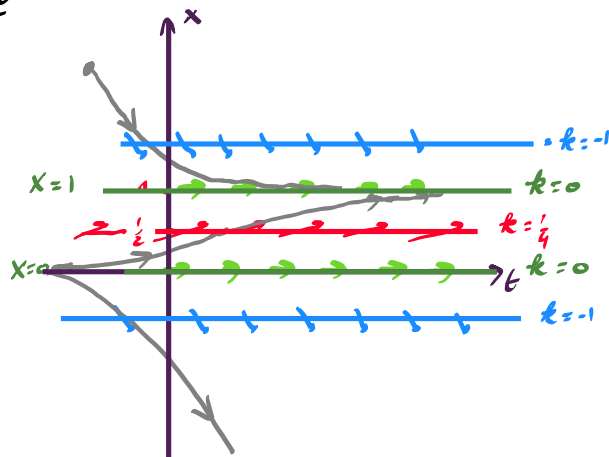
$$k = \frac{1}{4} : \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$k = 0 (< \frac{1}{4}) \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-0}}{2} = 0$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$k = -1 \quad x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2} = \boxed{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$



Remarque : si $x = 0$ (nulle partout) ($x(t) = 0$ pour tout t)

$$x' = 0 \text{ et } x(1-x) = 0 \text{ on a bien } \begin{matrix} x' = x(1-x) \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

→ $x \equiv 0$ est solution!

• si $x \equiv 1$ ($x(t) = 1$ pour tout t)

• si $x \equiv 1$ ($x(t) = 1$ pour tout t)
 $x'(t) = 0$ et $x(x-1) = 0$ $0 = 0$
 est aussi solution

Remarques : ① dans les EDO autonomes (de dimension 1)

de la forme $x' = f(x)$

il existe des solutions particulières qui vérifient $x' = 0$

et donc sont solutions de $f(x) = 0$

ces solutions sont appelées solutions stationnaires (indépendantes du temps) ou encore équilibres ou encore point critique

Ce sont aussi les isoclines-0 (isoclines-nuls)
 nullclines en anglais

② Quand les solutions ne sont pas les équilibres, elles sont soit croissantes, soit décroissantes entre chaque équilibre mais elles ne peuvent pas osciller!!

③ On peut en déduire une méthode générale pour trouver les trajectoires des solutions de EDO autonomes en dimension 1

MÉTHODE : on considère l'EDO $x' = f(x)$

ÉTAPE 1 : on cherche les équilibres x^* de cette EDO :

ce sont les solutions de $f(x^*) = 0$ (car $x'^* = 0$)

ÉTAPE 2 : une fois les x^* trouvés on trace une

droite verticale (qu'on appelle POURCENT DE PHASE)

où on reporte les x^*

ÉTAPE 3 : le signe de $f(x)$ est reporté sur cette

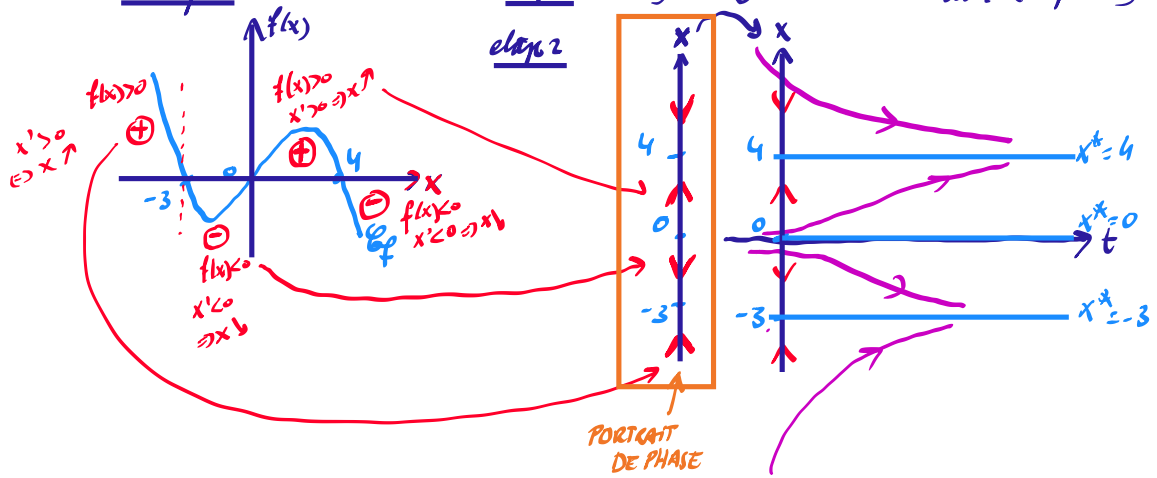
droite si $f(x) > 0 \rightarrow$ flèche qui monte

$f(x) < 0 \rightarrow$ " " descend

Exemple : $x' = f(x)$

étape 1 $f(x^*) = 0$ (v) $x^* = -3$ ou 0 ou 4 (3 équilibres)

étape 2



• 26 NOVEMBRE 2025

• BIFURCATIONS

Dans les cours précédents nous avons étudié les équilibres et leur stabilité pour les eds autonomes d'ordre 1, non linéaires sous forme normale

$$\boxed{x' = f(x)}$$

Nous allons voir ici que si l'équation dépend d'un paramètre et que ce dernier peut prendre différentes valeurs, alors l'ed peut voir son nombre d'équilibres changer et la stabilité se modifier.

Ces changements sont appelés bifurcations.

Nous allons explorer ici les bifurcations de "pus commus".

I La bifurcation SELLE-NŒUD (En Anglais SADDLE-NODE)

Exemple: Étudier les équilibres et la stabilité de l'équation

$$\boxed{x' = c + x^2} \text{ où } c \in \mathbb{R} \text{ (paramètre)}$$

suivant les valeurs de c .

Étape 1: Recherche des équilibres

Les équilibres x^* vérifient $x^{*'} = 0$ c-à-d ici $c + x^{*2} = 0$

$$\text{ou } c + x^{*2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x^{*2} = -c}$$

Il ya plusieurs cas possibles suivant les valeurs de c :

①. $\boxed{\text{Si } c > 0}$ alors $x^{*2} = -c < 0$ IMPOSSIBLE $\rightarrow$ donc il n'y a pas d'équilibre si $c > 0$

②. $\boxed{\text{Si } c = 0}$ alors $x^{*2} = 0$ la seule valeur possible est $\boxed{x^* = 0}$

$\rightarrow$ donc il ya un seul équilibre $x^* = 0$ si $c = 0$

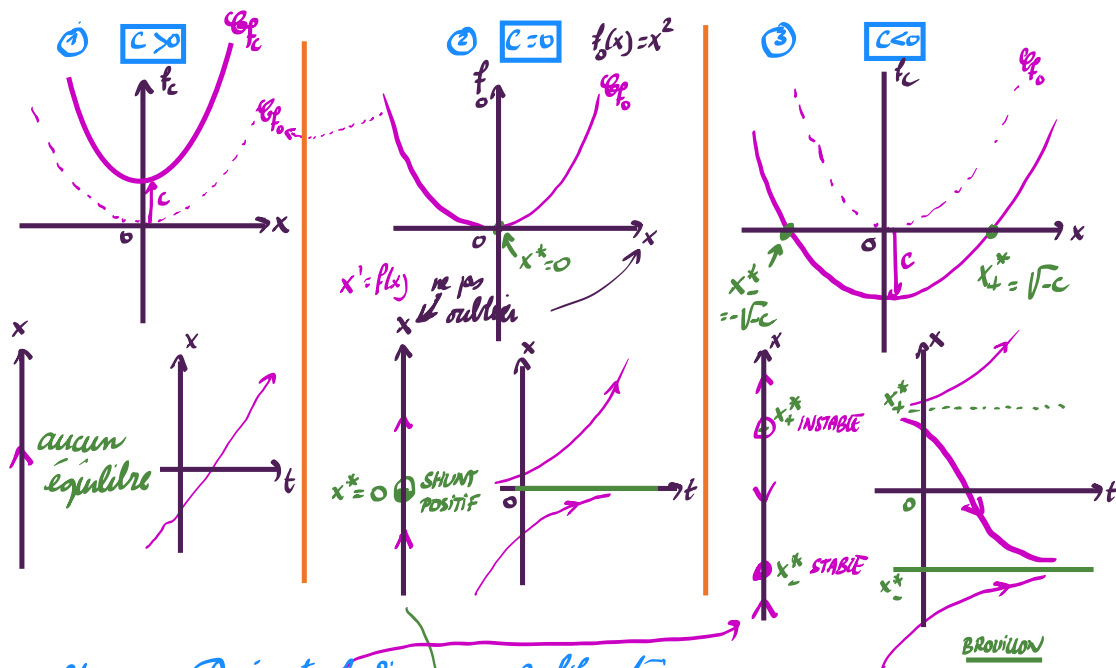
③. $\boxed{\text{Si } c < 0}$ $x^{*2} = -c > 0$ donc il ya 2 équilibres possibles:

$$\boxed{x_+^* \quad - \quad - \quad - \quad x_-^* = -\sqrt{-c}}$$

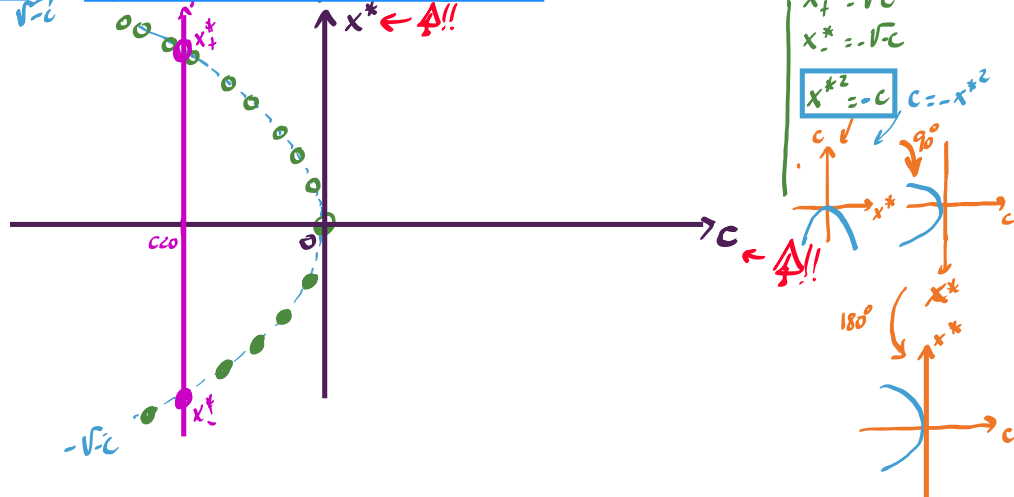
$$x_+^* = \sqrt{-c} \text{ et } x_-^* = -\sqrt{-c}$$

Etape 2: étudions leur stabilité

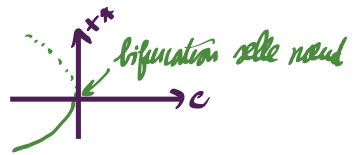
étudions le signe de f_c : $x \mapsto f_c(x) = x^2 + c$



Etape 3: Représenter le diagramme de bifurcation



Remarque : lors de bifurcations selle-nœud, en faisant varier le paramètre on peut faire apparaître des équilibres à partir de rien, avec une branche stable et une branche instable



II Bifurcation transcritique (TRANSCRITICAL)

Exemple : Étudier les équilibres et leur stabilité de

$$\boxed{x' = cx + x^2}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (paramètre)}$$

suivant les valeurs de c

Étape 1 : Cherchons les équilibres :

Les équilibres x^* vérifient $x^{*'} = 0$ c-à-d $cx^* + x^{*2} = 0$

$$\text{ou } cx^* + x^{*2} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x^*(c + x^*) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad x^* = 0 \text{ ou } x^* = -c$$

$\downarrow$
 $x^* = 0$ est TOUJOURS
ÉQUILIBRE (INDÉP. DE c)

$\hookrightarrow x^* = -c$ n'a pas de restriction
sur c

On a donc toujours 2 équilibres : $x^* = 0$ et $x^* = -c$, $c \in \mathbb{R}$

On a donc toujours 2 équilibres: $x^* = 0$ et $x^* = -c$, $c \in \mathbb{R}$

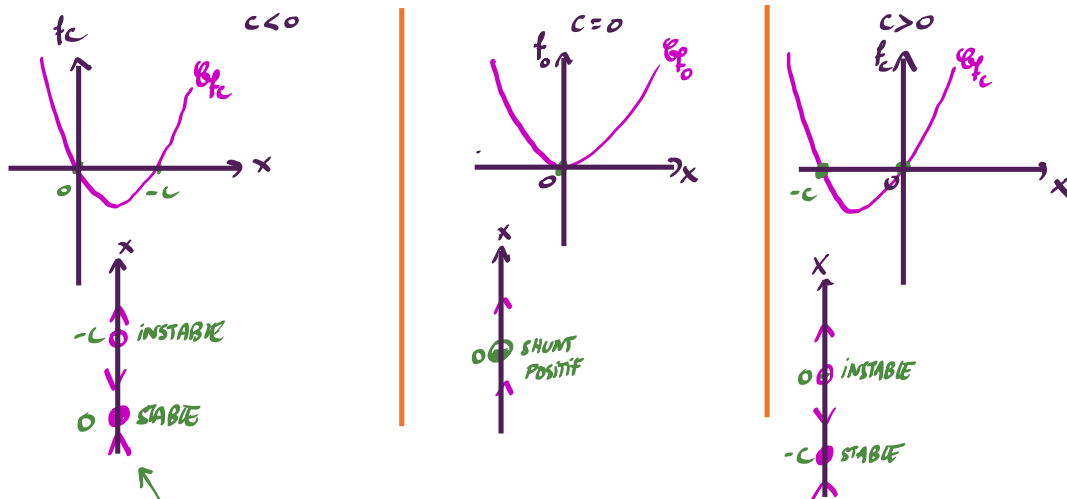
Remarque: si $c=0$, les 2 équilibres sont "superposés" $x^* = 0$

Etape 2: Étudions la stabilité des équilibres

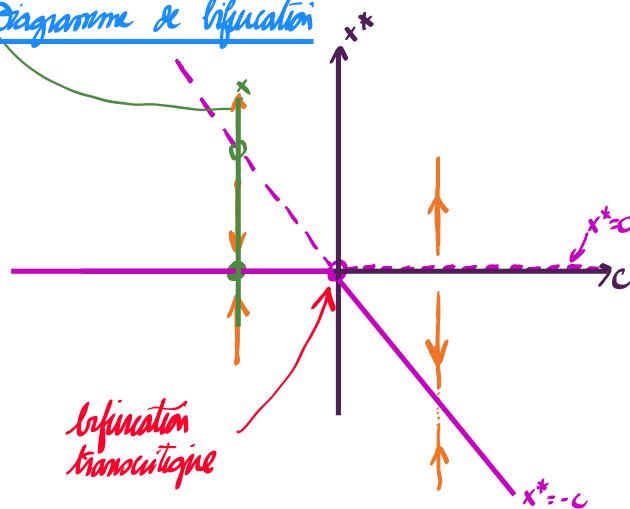
On étudie pour ça le signe de $f_c: x \mapsto cx + x^2$

$$f_c(x) = cx + x^2 = x(c+x)$$

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ x^* &= -c \end{aligned}$$



Etape 3: Diagramme de bifurcation



$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ x^* &= -c \end{aligned}$$

Remarque: Dans la bifurcation transcritique, le nombre d'équilibres ne change pas, mais leur stabilité change quand on passe la bifurcation

II Bifurcations fourches (PITCHFORK)

II Bifurcations fourches (PITCHFORK)

① Bifurcation FOURCHE SUPER CRITIQUE

Exemple: étudier les équilibres et leur stabilité de

$$x' = cx - x^3, \quad c \in \mathbb{R}$$

en fonction de c

Step 1: chercher les équilibres Les équilibres x^* vérifient $x^{*'} = 0$

car $cx^* - x^{*3} = 0$

ou $cx^* - x^{*3} = 0 \Leftrightarrow x^*(c - x^{*2}) = 0$

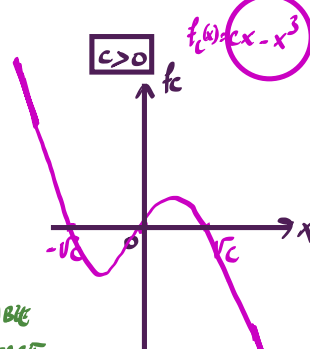
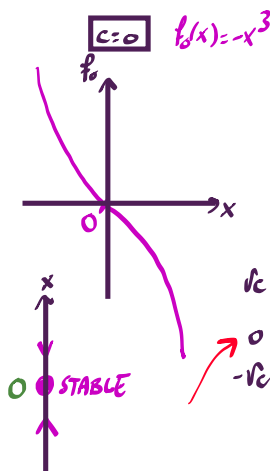
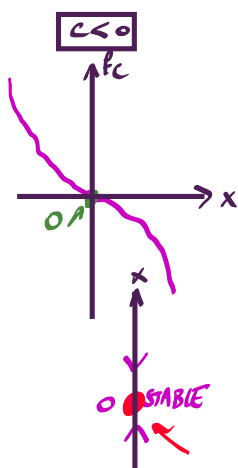
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^* = 0 \rightarrow \text{TOUTOURS ÉQUILIBRE INDÉPENDANT DE } c \\ c = x^{*2} \rightarrow \begin{cases} \text{si } c < 0: \text{PAS D'ÉQUILIBRE SUPPLÉMENTAIRE} \\ \text{si } c = 0: \text{UN ÉQUILIBRE } x^* = 0 \end{cases} \end{cases}$$

si $c > 0$: 2 ÉQUILIBRES SUPPLÉMENTAIRES

$$x_+^* = \sqrt{c} \text{ et } x_-^* = -\sqrt{c}$$

Step 2: étude de leur stabilité

$$f_c: x \mapsto cx - x^3 \quad (= x(c - x^2)) \quad \begin{matrix} \text{si } c > 0 \\ \downarrow \\ x(\sqrt{c} - x)(-\sqrt{c} - x) \end{matrix}$$



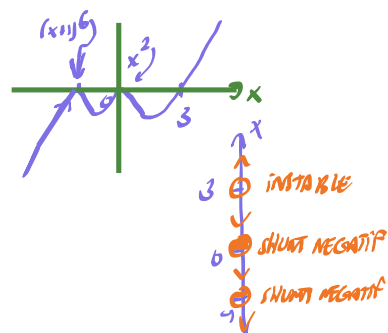
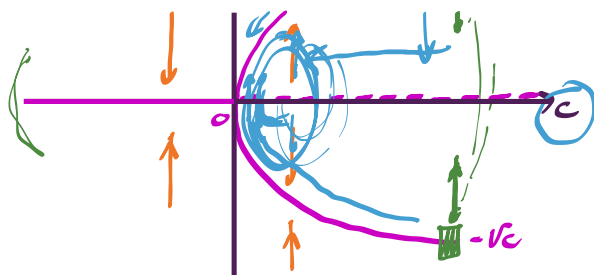
Remarque: si on a un polynôme avec plusieurs racines

$$f_c(x) = x^2(x-3)^5(x+1)^6 \sim x^2 \cdot x^5 \cdot x^6 = x^{13}$$

puissance paire $\downarrow$ 2 5 6 $\sim x^2 \cdot x^5 \cdot x^6$
 "rebondit sur la racine" $\uparrow$ 3 "traverse la racine" $\uparrow$ 1
 $(x+1)^6$

Diagramme de bifurcation





Exercice : Étudier l'équation

- $x' = cx + x^3$
- $x' = cx + x^3 - x^5$

STEVEN STROGATZ
"NON LINEAR DYNAMICS
& CHAOS"