. 22 octobr 2025

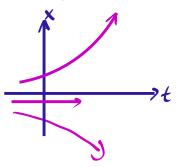
cours 3: Rapel: les et autonomes scalaire de la forme

x'(t) = f(x(t))

avec f continue ont pour solutions

- sixt des constants

- sort de fonctions monstons



Mauraix nouvelle: Dans la plus grande majorité des cas, on ne sait pas résondre d'edo de legr

x'(t) = f(t, x(t)) (cas non autonome)

ar $x'(t) \leq f(x(t))$ (can autonomu)

5. Etude qualitative des e do autonomes

Dimension 1: on s'interess in aux est de la forme x' = f(x) où $x: I \subset \mathbb{R}$ → \mathbb{R}

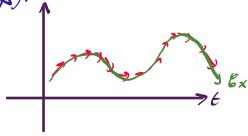
et f; JCR , R au f gui venfie le hypothèx on thérème de leanly-Ripschitz (pour avoir l'existènce et l'unicité).

a. Construction graphique des solutions:

Comme som la grande mojorité des cas il n'est jos posible de resoudre cu els on fait apel à l'étude ornalitative des solutions \rightarrow on va étudies comment κ comportent le solutions "en temp long" (c'est à dir quant $t \rightarrow +\infty$)

composent es sociulos en remp xong (c'es à erre quai t ->+0)
Avant sa, nove allows montre comment construée graphiquement es solutions
(saus connaître leux forme exficite).

Pour fair la construction graphique nous aum beooin de connaître les tangentes (en tout temp).



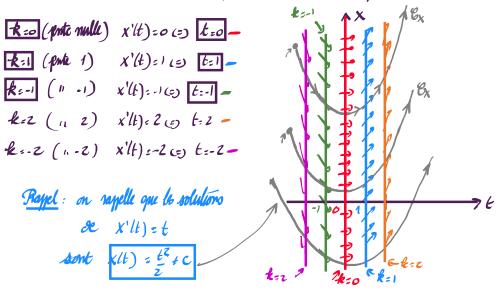
Enemple (cas Now Autonome) On consider l'edo x'(t)=t ordre 1, pas autonome lineaire, sous forme mornale

Comment sessioner l'allieue de ces solutions?

(tape 1: on recheiche les courles qui ont la même pente k ($k \in \mathbb{R}$)

c'est a dire les solutions de l'equation x'(t)=kpoi de la langente à k en $(k \times k)$ Or ici x'(t)=t (k)

Par consequent $x'(t): k \in [t:k]$, $k \in \mathbb{R}$, some par chaque pente k source on put traver une course d'equation t: k sur laquelle toute le solution de x'(t): t auront la même pente k



Sefinition: On apelle isoccine-k ("Se même pente k") se l'esto X'(t) = f(t, x(t)) l'ensemble des possible su plan tel que X'(t) = k ('est à six f(t, x(t)) = k

Attention : en général une isceline n'est une volution d'edo.

Exemple: Determine l'alluse des solutions de l'edo x'(t)=x²(t)-t

(pour simplifier on écut x'=x²-t) en se sevant des

isoclires le de cette edo.

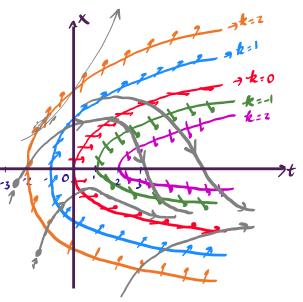
Solution: Ses isoclines k de $x'=x^2-t$ sont solutions de x'=k ($k \in \mathbb{R}$)

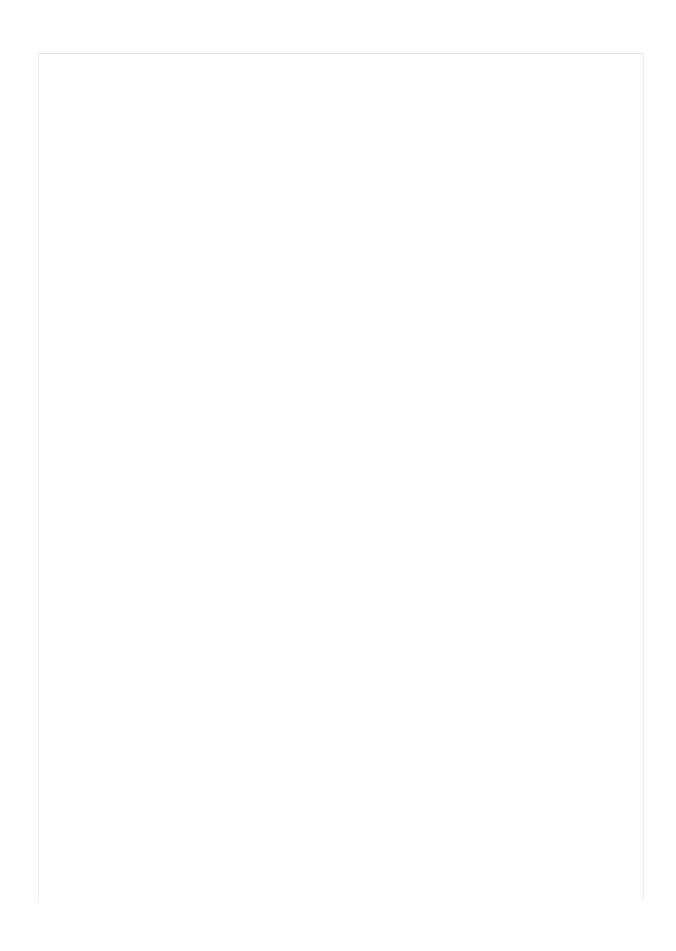
c'est à die $x^2-t=k$ = à dessinier

sisoler x en fonction de t

x² t : k = x² = t+k = pan k donné dans R il faut s'assure que t+k > 0 càd que t > -k

R=-2 x'=2(5) x= = 1/6-2 t/2 -





```
Premple: Determine l'alluse des volutions de l'eso: x' = x(1-x)
                            - equation autonome (nore 1, non lineau, now forme nomale)
      Solution: Les isoclines - k se l'est autonome x'=x(1-x) vérifient
                         x' = k \quad color \quad X(1-x) = k \quad ai \quad k \in \mathbb{R}
                     X(1-X)=k (=) X-x^2=k
                                       \Delta = 1 - 4 \frac{1}{k}
Si \Delta < 0 cad 1-4k<0 (2) \frac{1}{v} < k \rightarrow PAS DE SOLUTION =) PAS D'ISOCLINE
                  si \Delta = 0 in 1-4k= 0(=) \frac{|\mathbf{k}|^2}{4} \rightarrow 1 reale volution |\mathbf{x}| = \frac{1}{2} =) Une settle isoccine
                  si \Delta > 0 and 1-4h > 0 = \frac{|\mathbf{k}|^2}{4} = 2 solutions x_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} et x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}
                                                                2 isocline (nymétiques pr rapport à ;
                           X' : X(1-x)
-k > PAS D'ISOCLINE
k=1 : X=1
k: O(\frac{1}{4}) \times_{1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 0}}{2} = 0
                                                 X = 1 _
K = -1
X_{2} = \frac{1+\sqrt{1-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1 = 1
X_{1} = \frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1
X_{2} = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1
      Remarques, is x = 0 (nulle partout) (xlt) = 0 four tout t)
                            X'=0 et X(1-x)=0 an a bein X'=X(1-x)
                       \rightarrow X = 0 est solution!
                      s x = 1 (xlt)=1 pan bout+)
```

est anon solution. (x(t)=1) four four t) (x(t)=0) et x(x-1)=0 0=0

Remarques: ① Sans les est autonomes (de d'ménion 1)

de la forme x': f(x)

il existe des solutions putaulines qui veufient x': o

et sont sont solutions de f(x) = o

ces solutions sont apelées solutions stationaire (indépendents du temps) au enune equilibre au enune point critique

le sont auxò les àcclines - o (àcclines nulls)

nullclines en anglais

② Quam les solutions ne sont per les equilités, elle sont soit croissants, soit décroissants entre chaque equilité mis elles ne jeuvent per oxille!!

3 On <u>feut en dedicie</u> une niethode generals pour trouver les trajectous des solutions de est autonomes en dimension

METHODE: on considér l'est x'=f(x) $\frac{\text{ÉTAPE 1}}{\text{ce sont ls solutions de }} x'=f(x)$ $\frac{\text{ETAPE 1}}{\text{ce sont ls solutions de }} (\text{Can } x^*)=0$

ETAPE 2: une fais le x* lioure on trace une

Oroste redicale (qu'on apelle PORSENT DI PHASE)

où on reporte le x*

ETAPES: le signe de f(x) et <u>ujotéle</u> sus cette disconstant s' $f(x) > 0 \rightarrow fleihe qui monte <math>f(x) < 0 \rightarrow f$

