Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Intro. Analyse Num. L2- Printemps 2017

Série d'exercices n°1/5
Interpolation polynomiale

Exercice 1. *Un exemple de polynôme d'interpolation.*
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Déteminer le polynôme P_1 d'interpolation de Lagrange de f aux nœuds 0 et 1.
2. Déterminer le polynôme P_2 d'interpolation de Lagrange de f aux noeuds 0, $1/2$ et 1. On l'écrira sous forme de Lagrange et sous forme de Newton.

Exercice 2. *Convergence de l'interpolation de Lagrange* Soit L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

aux $n+1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ de l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction f.
2. Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n+1$ points $x_0, ..., x_n$ sont équidistants, nous avons alors
$$\lim_{n\to+\infty} \|f - L_n\|_\infty = 0.$$
3. Considérons toujours la fonction f
$$f(x) = \frac{1}{x-\alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$
aux $n+1$ points distincts $x_0, ..., x_n$ équidistants de l'intervalle $[-1, 1]$. Dans la pratique nous n'agissons pas du tout comme ce qui précède. Nous préférons utiliser des polynômes de degré peu élevé sur chaque petit intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
Écrire l'approximation de Lagrange de degré 1, f_n de f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, ..., n-1$
4. Montrer que si $\alpha \neq [-1, 1]$, nous avons
$$\|f - L_n\|_\infty \leq \frac{c}{n^2}$$
et donc que f_n converge uniformément vers f lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3. *Interpolation Polynomiale de Hermite*
Soient $x_0, ..., x_n$, $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$, $(a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b)$ et f de classe $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ une fonction dont on connaît les valeurs et celles de sa dérivée en ces $(n+1)$ points distincts.
Nous cherchons un polynôme H_n de degré minimal tel que

$$H_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{et } H_n'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Nous rappelons que les fonctions de base de l'interpolation de Lagrange, c'est à dire les polynômes de degré n tels que $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $i, j = 0, ..., n$ sont donnés pour tout $i = 0, ..., n$ par

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Nous allons montrer le résultat suivant :
"Le polynôme H_n s'écrit

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) h_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i) \tilde{h}_i(x)$$

avec

$$h_i(x) = (1-2) l_i'(x_i)(x - x_i)) l_i^2(x), \quad \text{et} \quad \tilde{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x).$$

De plus, si $f \in \mathscr{C}^{2(n+1)}([a, b], \mathbb{R})$

$$|f(x) - H_n(x)| \leq \frac{\|f^{(2(n+1))}\|_\infty}{(2n+2)!} \Pi_{i=0}^{n} (x - x_i)^2."$$

1. Montrer que pour $i, j = 0, ..., n$
$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad h_i'(x_j) = 0,$$
et
$$\tilde{h}_i(x_j) = 0, \quad \tilde{h}_i'(x_j) = \delta_{i,j}.$$
2. En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré $2n+1$ vérifiant les conditions requises.
3. En déduire une majoration de l'erreur $|f(x) - H_n(x)|$.

Exercice 4. *Formule des Différences Divisées (Un classique)*
Nous supposons que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $n+1$ fois continûment différentiable. La formule de Newton qui consiste à écrire le polynôme P_n aux points x_0 ,..., x_n sous la forme

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}),$$

permet de construire le polynôme P_n à l'aide d'une récurrence. En effet,

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k).$$

Autrement dit, connaissant P_{n-1}, il suffit de calculer a_n pour connaître P_n.

a) Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points distincts $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est donné par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i] \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k),$$

où $f[.]$ désigne les différences divisées de f définies par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f[x_i] & = & f(x_i), \\ f[x_0, ..., x_k] & = & \dfrac{1}{x_k - x_0}(f[x_1, ..., x_i] - f[x_0, ..., x_{i-1}]), \end{array} \right. \quad \text{pour tout } \ i = 0, ..., n.$$

Montrer ensuite que $f[x_0, ..., x_n]$ est invariant par permutations.

b) Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$.

c) Montrer que

$$|P - n(x) - f(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\pi_n(x)|,$$

où

$$M_{n+1} = \max_{a\leq x\leq b} |f^{(n+1)}(x)|, \quad \text{et} \quad \pi_n(x) = \prod_{i=0}^{i-1} (x - x_i).$$

N.B. : Remarquons bien ici que l'estimation n'est pas forcément quelque chose de petit (voir Phénomène de Runge).

Application.
Trouver l'interpolation de Lagrange de la fonction $x \to f(x) = \sin(\pi x/2)$ aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Puis à l'aide des questions précédentes établir une estimation d'erreur.

Exercice 5. *Polynôme de Tchebychev*
Soit $n \in \mathbb{N}$, nous définissons le polynôme de Chebychev de première espèce par

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1, 1].$$

1. Montrer que les fonctions T_n satisfont la formule de récurrence
$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_0(x) & = & 1, \quad T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) & = & 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{array} \right.$$
2. Montrer ensuite que les polynômes $T_n(x)$ sont orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1 - x^2)^{-1/2}$,
$$\int_{-1}^{1} T_n(x - T_m(x)) \frac{dx}{(1 - x^2)^{-1/2}} = \left\{ \begin{array}{ll} \pi, & \text{si} \quad n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{si} \quad n = m \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad n \neq m. \end{array} \right.$$
3. Montrer que $T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 2^{n-1}.

4. Nous posons $t^n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$, $y_k = \cos(\dfrac{k\pi}{n})$, $k = 0, ..., n$, calculer $t^n(y_k)$.
5. Soient $x_1, ..., x_n$, n points quelconques de $[-1, 1]$. Nous posons $w_n(x) = (x-x_1)...(x-x_n)$. Supposons par l'absurde que $\|w_n\|_\infty < \|t^n\|_\infty$. Montrer alors que

$$\begin{cases} t^n(y_k) - w_n(y_k) > 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{pair}, \\ t^n(y_k) - w_n(y_k) < 0, & \text{si} \quad k \quad \text{est} \quad \text{impair}. \end{cases}$$

6. En déduire que $\|w_n\|_\infty \geq \|t^n\|_\infty$.
7. Application : Soit L_{n-1} le polynôme de Lagrange de la fonction f définie pour tout $x > 2$ par $f(x) = \ln(x+2)$ aux points racines du polynôme de Chebychev T_n. Déterminer n tel que

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\ln(x+2) - L_{n-1}(x)| \leq 2^{-10}.$$

Exercice 6. *Splines cubiques*

Dans cet exercice, nous souhaitons interpoler une fonction $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ par une fonction cubique par morceaux. C'est que nous appelons une spline cubique.
Pour cela nous définissons $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$, qui déterminent une partition de l'intervalle $[a, b]$, avec $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$.
Nous appelons spline cubique, une fonction S vérifiant

1. $S \in \mathscr{C}^2([a, b]), \mathbb{R})$,
2. $S\ |_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 pour $i = 0, ..., n$.

Pour construire une telle approximation, nous cherchons à définir une spline S en fonction seulement de ses valeurs aux points x_i et de sa dérivée seconde en x_i.

1. Sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 défini par ses valeurs $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$, $P''(\beta)$.

2. Déterminer les valeurs des dérivées premières en α et β en fonction des données.
3. En déduire qu'il existe une unique spline cubique S interpolant f au sens suivant

$$\begin{cases} S(x_i) &= f(x_i), \quad \text{pour} \ \ 0 \leq i \leq n+1 \\ S'(a) &= f'(a), \quad S'(b) = f'(b). \end{cases}$$

4. En prenant pour $i \in \{0, ..., n+1\}$ la fonction spline S_i telle que

$$S_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad j \neq i, \\ 1, & \text{si} \quad j = i. \end{cases}$$

et $S_i'(a) = S_i'(b) = 0$, puis les splines S_a et S_b telles que $S_a(x_i) = S_b(x_i) = 0$, et $S_a'(a) = S_b'(b) = 1$ et $S_b'(a) = S_a'(b) = 0$, montrer qu'une fonction spline S interpolant f sur $[a, b]$ s'écrit

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+1} f_j S_j(x) + \sum_{\alpha \in \{a,b\}} f'_\alpha S_\alpha(x).$$

Nom et Prénom : Intercalaire N°

Exercice 6:

1. (a) P étant de d° 3, P'' est de d° 1, on pose alors
$$P''(x) = ax + b \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
On a : $P''(\alpha) = a\alpha + b$ (1)
$P''(\beta) = a\beta + b$ (2)

(1) − (2) donne $a(\alpha-\beta) = P''(\alpha) - P''(\beta)$
$\beta(1) - \alpha(2)$ donne $\beta P''(\alpha) - \alpha P''(\beta) = b(\beta-\alpha)$

On en déduit que $a = \dfrac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{\alpha-\beta}$ et $b = \dfrac{\beta P''(\alpha) - \alpha P''(\beta)}{\beta-\alpha}$

Notons que $b = \dfrac{(\beta-\alpha)P''(\alpha) + \alpha(P''(\alpha)-P''(\beta))}{\beta-\alpha} = P''(\alpha) + \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\left(P''(\alpha)-P''(\beta)\right)$

Il vient : $P''(x) = \left(\dfrac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{\alpha-\beta}\right)x + P''(\alpha) + \alpha/_{\beta-\alpha}\left(P''(\alpha)-P''(\beta)\right)$
$$= \left(\frac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{(\alpha-\beta)}\right)(x-\alpha) + P''(\alpha)$$

c'est à dire :
$$\frac{P''(x)-P''(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{\alpha-\beta}$$

(b) D'après ce qui précède, $P''(x) = P''(\alpha) + \left(\dfrac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{\alpha-\beta}\right)(x-\alpha)$

Considérons $F : x \longmapsto P''(\alpha)(x-\alpha) + \left(\dfrac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{2(\alpha-\beta)}\right)(x-\alpha)^2$

On vérifie aisément que $F' = P''$ et donc les primitives de P'' sont de la forme $F + \text{cte}$. On en déduit que P' s'écrit
$$P'(x) = v + P''(\alpha)(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{2(\alpha-\beta)}(x-\alpha)^2 \quad \text{avec } v \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

(c) Un raisonnement analogue donne
$$P(x) = u + v(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(x-\alpha)^2 + \frac{P''(\alpha)-P''(\beta)}{6(\alpha-\beta)}(x-\alpha)^3 \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}. \ (**)$$

(d) On a $P(\alpha) = u$.

D'autre part, on déduit de (*) que $v = P'(\alpha)$.

En remplaçant x par β dans (**) on a : $P(\beta) = P(\alpha) + P'(\alpha)(\beta-\alpha) + \dfrac{P''(\alpha)}{2}(\beta-\alpha)^2$
$$+ \frac{P''(\beta)-P''(\alpha)}{6}(\beta-\alpha)^2$$

Nom et Prénom :

Intercalaire N°

On en déduit que

$$P'(\alpha)(\beta-\alpha) = P(\beta) - P(\alpha) - (\beta-\alpha)^2\left[\frac{P''(\alpha)}{2} + \frac{P''(\beta)-P''(\alpha)}{6}\right]$$

càd $P'(\alpha) = \frac{P(\beta)-P(\alpha)}{\beta-\alpha} - \left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2P''(\alpha) + P''(\beta)\right]$

On en déduit que P est uniquement déterminé par $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P''(\alpha)$ et $P''(\beta)$.

2. (a) En revenant à (*), on a

$$P'(\beta) = P'(\alpha) + P''(\alpha)(\beta-\alpha) + \frac{P''(\beta)-P''(\alpha)}{2(\beta-\alpha)}(\beta-\alpha)^2 = P'(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[P''(\alpha) + \frac{P''(\beta)-P''(\alpha)}{2}\right]$$

$$= P'(\alpha) + \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\left(P''(\beta) + P''(\alpha)\right)$$

$$= \frac{P(\beta)-P(\alpha)}{\beta-\alpha} - \left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2P''(\alpha) + P''(\beta) - 3(P''(\beta) + P''(\alpha))\right]$$

$$= \frac{P(\beta)-P(\alpha)}{\beta-\alpha} + \left(\frac{\beta-\alpha}{6}\right)\left[2P''(\beta) + P''(\alpha)\right]$$

(b) On considère l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

En appliquant ce qui précède avec $\beta = x_i$, on a le résultat :

$$S'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{6}\right)\left[2S''(x_i) + S''(x_{i-1})\right]$$

(c) En appliquant ce qui précède à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et $x_i = \alpha$, on a aussi

$$S'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\right)\left[2S''(x_i) + S''(x_{i+1})\right]$$

En combinant ces deux égalités, on aboutit à :

$$\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{6}\right)\left[2S''(x_i) + S''(x_{i-1})\right] + \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{6}\right)\left[2S''(x_i) + S''(x_{i+1})\right] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

(d) On considère l'intervalle $[x_0, x_1]$, avec $\alpha = x_0$:

$$S'(x_0) = f'(a) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \left(2S''(x_0) + S''(x_1)\right)\left(\frac{x_1 - x_0}{6}\right)$$

(e) On a de même

$$S'(x_{n+1}) = f'(b) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} + \left(S''(x_n) + 2S''(x_{n+1})\right)\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{6}\right)$$

Nom et Prénom :   Intercalaire N°

On se place dans le cas simplifié d'un maillage uniforme,

i.e. $x_{i+1} - x_i = h \quad \forall i = 0, .., m$.

Pour tout $i = 1, .., m$, on a :

$$\frac{h^2}{6}\left[S''(x_{i-1}) + 4S''(x_i) + S''(x_{i+1})\right] = f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}) =: \Delta f_i$$

D'autre part, on a $\frac{h^2}{6}\left[2S''(x_0) + S''(x_1)\right] = f(x_1) - f(x_0) - h f'(a)$

et $\frac{h^2}{6}\left[2S''(x_{m+1}) + S''(x_m)\right] = f(x_m) - f(x_{m+1}) + h f'(b)$

Matriciellement : $AS'' = F$, avec

$$A = \frac{h^2}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad S'' = \begin{pmatrix} S''(x_0) \\ \vdots \\ \\ S''(x_{m+1}) \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} f(x_1) - f(x_0) - h f'(a) \\ \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_m \\ f(x_m) - f(x_{m+1}) + h f'(b) \end{pmatrix}$$

A étant à diag. dominante, on en déduit l'unicité de S'' en fonction des données sur f. (on admettra ce résultat)