Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2015

Série d'exercices n°5-B/6
Manipulation de fonctions usuelles

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}(e^x - x), \qquad 2.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}, \qquad 3.\ \lim_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle et a un réel. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Trouver la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x.$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) vérifiant $m^n = n^m$.

Exercice 4

Préciser les domaines de définition et les domaines de dérivabilité, puis calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$1.\ f(x) = e^{x^2}, \qquad 2.\ g(x) = \ln|\ln x|, \qquad 3.\ h(x) = \ln|\sin(\frac{x}{2})|.$$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & \text{si } \; x > 0, \\ 1, & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 (avec $x \neq 0$),
2. Étudier en quels points de $\mathbb{R}_+$ la fonction f est dérivable.
3. Étudier ses variations,
4. Tracer sommairement son graphe.

Exercice 6

Établir la formule suivante

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x),$$

où x, y et z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Exercice 7

Montrer que les formules suivantes sont valables pour tous réels x et y,

1. $\text{ch}^2 x + \text{sh}^2 y = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 y = \text{ch}(x+y)\text{ch}(x-y)$,
2. $\text{sh}x + \text{sh}y = 2\text{sh}(\dfrac{x+y}{2})\text{ch}(\dfrac{x-y}{2})$,
3. $\text{ch}x - \text{ch}y = 2\text{sh}(\dfrac{x-y}{2})\text{sh}(\dfrac{x+y}{2})$.

Exercice 8

Étudier les variations et tracer les graphes des fonctions suivantes

$$1.\ f(x) = \text{th}(\frac{1}{x}), \quad 2.\ g(x) = x\text{th}(\frac{1}{x}), \quad 3.\ h(x) = \text{th}x - \frac{1}{\text{ch}x}.$$

Exercice 9

Résoudre le système

$$\begin{cases} \text{ch}x + \text{ch}y &= 3, \\ \text{sh}x + \text{sh}y &= 2. \end{cases}$$

Exercice 10

Résoudre les équation

1. $2^{\sin^2 x} = \cos x$,	2. $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$,	3. $\text{ch}x = \sqrt{5}$,
4. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$,	5. $3\text{ch}x + 2\text{sh}x = 4$,	6. $2\text{ch}x\text{sh}x = \sqrt{3}\text{ch}(5x)$.

Exercice 11

Déterminer $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 12

Montrer que pour tout réel x,

$$\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Exercice 13

Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies pour tout réel leur donnant un sens ? Et pour les autres, pour quels réels sont-elles vraies ?

1. $\sin(\arcsin x) = x$, 2. $\arcsin(\sin x) = x$, 3. $\tan(\arctan x) = x$, 4. $\arctan(\tan x) = x$,
5. $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh} x) = x$, 6. $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh} x) = x$, 7. $\mathrm{th}(\mathrm{argth} x) = x$, 8. $\mathrm{argth}(\mathrm{th} x) = x$,

Exercice 14

Établir les formules suivantes, valables pour tout x dans le domaine de définition des fonctions qui y apparaissent

1. $\arccos x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 2. $\mathrm{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 3. $\mathrm{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$.

Exercice 15

Étudier, sur l'ensemble où elles sont définies (et que l'on précisera) les fonctions suivantes, puis tracer leurs courbes représentatives

1. $f(x) = \arctan(\frac{x}{1 - x^2})$, 2. $g(x) = \arcsin(\frac{2x}{1 + x^2}) - 2 \arctan x$,
3. $h(x) = \mathrm{ch}(\mathrm{argsh} \sqrt{x^2 - 1})$, 4. $k(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$,

Exercice 16

Résoudre, pour une inconnue x variant dans l'ensemble des réels pour lesquels l'équation a un sens, les équations suivantes :

1. $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$, 2. $\arctan(x - 1) + \arctan x + \arctan(x + 1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 17

Soit g la fonction d'une variable réelle définie par

$$g(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)/$$

1. Préciser l'ensemble de définition de g.
2. Calculer la fonction dérivée de g.
3. Montrer que pour tout $x < 1$, on a $g(x) = \arctan x + \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 1.- $e^x - x = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1\right) \longrightarrow +\infty$ quand $x \to +\infty$.

$$\frac{e^x}{\operatorname{Log} x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{Log} x} \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } x \to +\infty.$$

Posons $u = \dfrac{1}{x}$; si $x \to 0$, $x > 0$, $u \to +\infty$ et $x^2 e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^u}{u^2} \longrightarrow +\infty$;

si $x \to 0$, $x < 0$, $u \to -\infty$ et $x^2 e^{\frac{1}{x}} = \dfrac{e^u}{u^2} \longrightarrow 0$.

Exercice 5.- Pour $x > 0$, $f(x) = e^{x \operatorname{Log} x}$. Quand $x \to 0$, $x \operatorname{Log} x \to 0$ et $f(x) \longrightarrow 1$.

f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

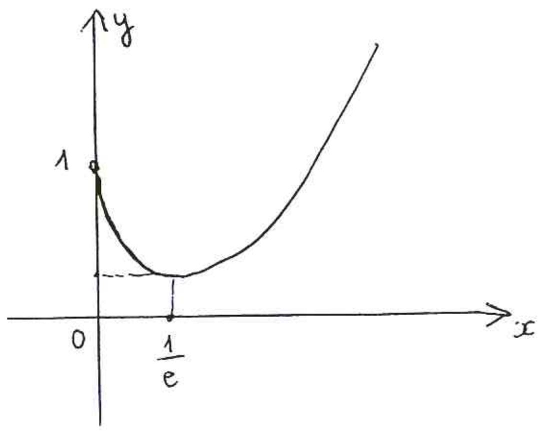
On rappelle que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$ (par exemple parce que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - e^0}{u - 0} = (\exp)'(0) = e^0 = 1$). Alors, $\forall h > 0$,

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{h \operatorname{Log} h} - 1}{h} = \frac{e^{h\operatorname{Log} h} - 1}{h \operatorname{Log} h} \times \operatorname{Log} h \qquad (1)$$

Quand $h \to 0$, $h \operatorname{Log} h \to 0$, donc le 1er terme du produit (1) tend vers 1 tandis que le 2ème, $\operatorname{Log} h$, tend vers $-\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0.

$\forall x > 0$, $f'(x) = (\operatorname{Log} x + 1) e^{x \operatorname{Log} x}$; d'où le tableau de variation

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$



$$f''(x) = \frac{1}{x} e^{x\operatorname{Log} x} + (\operatorname{Log} x + 1)^2 e^{x \operatorname{Log} x}$$

> 0, $\forall x > 0$. Donc le graphe a sa convexité tournée vers les $y > 0$

Exercice 2.- On rappelle que $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1+u)}{u} = 1$ (par exemple parce que

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+u) - \operatorname{Log}(1+0)}{u - 0} = \frac{d}{du} \operatorname{Log}(1+u)\Big|_{u=0} = \left[\frac{1}{1+u}\right]_{u=0} = 1)$$

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = \exp\left[x \operatorname{Log}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)\right]$$

Quand $x \to +\infty$, $f(x) \to a$, donc $\frac{f(x)}{x} \to 0$ et $\frac{x}{f(x)} \operatorname{Log}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)$

$\to 1$; par conséquent

$$x \operatorname{Log}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right) = f(x)\frac{x}{f(x)} \operatorname{Log}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right) \to a \times 1 = a$$

Finalement $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^a$

Exercice 6.– On pose $u = x-y$, $v = y-z$; on a alors $u+v = x-z$.
Donc $\operatorname{tg}(x-y)+\operatorname{tg}(y-z)+\operatorname{tg}(z-x) = \operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v - \operatorname{tg}(u+v)$

$$= \operatorname{tg}u + \operatorname{tg}v - \frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}u - \operatorname{tg}^2u\operatorname{tg}v + \operatorname{tg}v - \operatorname{tg}u\operatorname{tg}^2v - \operatorname{tg}u - \operatorname{tg}v}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v} = -\frac{\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v(\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v)}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v}$$

$$= -\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v\operatorname{tg}(u+v) = \operatorname{tg}u\operatorname{tg}v\operatorname{tg}(-u-v) = \operatorname{tg}(x-y)\operatorname{tg}(y-z)\operatorname{tg}(z-x)$$

Exercice 4.– f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(x) = 2x e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

g est définie pour tout $x>0$ tel que $|\operatorname{Log} x| \neq 0$ donc sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
$=]0,1[\cup]1,+\infty[= D$. g est dérivable en tout point de D et, $\forall x \in D$,

$$g'(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log} x}$$

h est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\frac{x}{2} \neq 0$, donc tel que $\frac{x}{2} \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc h est définie sur $\Delta = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Elle est dérivable en tout point de Δ, et, $\forall x \in \Delta$, $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

<u>Exercice 7.</u>– 1) $ch^2 x + sh^2 y = \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} + \dfrac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4}$

$$= \frac{e^{2x}+e^{2y}+e^{-2x}+e^{-2y}}{4}$$

$$sh^2 x + ch^2 y = \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2y}+2+e^{-2y}}{4} = \frac{e^{2x}+e^{2y}+e^{-2x}+e^{-2y}}{4}$$

$$ch(x+y)\,ch(x-y) = \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} \cdot \frac{e^{x-y}+e^{-x+y}}{2}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2y}+e^{2y}+e^{-2x}}{4}$$

2) $$2\,sh\frac{x+y}{2}\,ch\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}}\right)\left(e^{\frac{x-y}{2}} + e^{-\frac{x-y}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-y} + e^{y} - e^{x}\right) = sh\,x + sh\,y$$

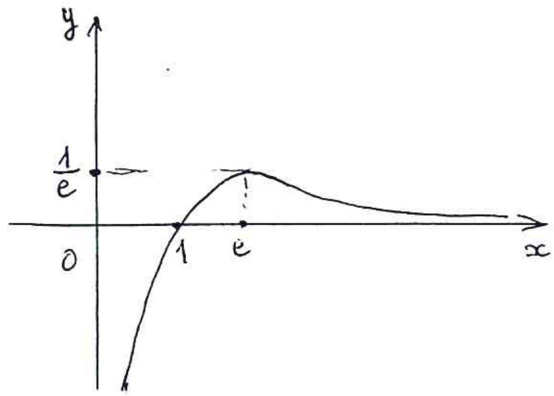
3) $$2\,sh\frac{x-y}{2}\,sh\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}}\right)\left(e^{\frac{x+y}{2}} - e^{-\frac{x+y}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{y} - e^{-y} + e^{-x}\right) = ch\,x - ch\,y$$

<u>Exercice 8.</u>– $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{Log}\,x}{x^2}$; d'où le tableau de variations

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

et le graphe (sommaire !)



Il y a bien sur tous les couples $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $m=n$. Nous chercherons donc les autres couples, i.e. les $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $m\neq n$ et $m^n=n^m$, c'est-à-dire tels que $n\,\mathrm{Log}\,m = m\,\mathrm{Log}\,n$ ou encore tels que $f(m)=\dfrac{\mathrm{Log}\,m}{m}=\dfrac{\mathrm{Log}\,n}{n}=f(n)$.

L'étude de f montre que si $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$, nécessairement l'un des deux réels est dans $]1,e[$, l'autre dans $]e,+\infty[$. L'un des entiers cherchés est donc nécessairement >1 et $<e=2,7\ldots$, c'est-à-dire est nécessairement égal à 2. On est ramené à chercher les $n\in\mathbb{N}$, $n>e$, donc $n\geq 3$, tels que $2^n=n^2$

Remarquons d'abord que $(n-1)^2\geq(3-1)^2=4>2$ dès que $n\geq 3$.
On en déduit que $n^2-2n+1>2$ i.e. que $n^2>2n+1$.
Montrons par récurrence que $2^n>n^2$ si $n\geq 5$.
Pour $n=5$: $2^5=32>25=5^2$
Supposons que $2^n>n^2$ pour un $n\geq 5$.
Alors $2^{n+1}=2\,2^n>2n^2=n^2+n^2>n^2+2n+1$ (car $n\geq 3$)
donc $2^{n+1}>(n+1)^2$.

Par conséquent les seuls $n\geq 3$ possibles tels que $2^n=n^2$ sont $n=3$ et $n=4$. Pour $n=3$, $2^n=8$ et $n^2=9$.
Pour $n=4$, $2^n=16$ et $n^2=16$.
Donc les seuls couples $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $m\neq n$ et $m^n=n^m$ sont $(2,4)$ et $(4,2)$.

Exercice 9.– On pose $u=e^x$, $v=e^y$. On a le système

$$\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}+v+\frac{1}{v}\right)=3 \quad , \quad \frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}+v-\frac{1}{v}\right)=2$$

c'est-à-dire $\begin{cases} u+\dfrac{1}{u}+v+\dfrac{1}{v}=6 \\ u-\dfrac{1}{u}+v-\dfrac{1}{v}=4 \end{cases}$

Par addition membre à membre on obtient $u+v=\frac{10}{2}=5$.

Par soustraction membre à membre on obtient $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=1$; c'est-à-dire

$\frac{u+v}{uv}=1$, d'où $uv=u+v=5$.

u et v sont racines de $x^2-5x+5=0$.

Les racines de cette équation sont $(\Delta=25-20=5)$ $\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$

d'où, par exemple (puisque le système est symétrique en x et y)

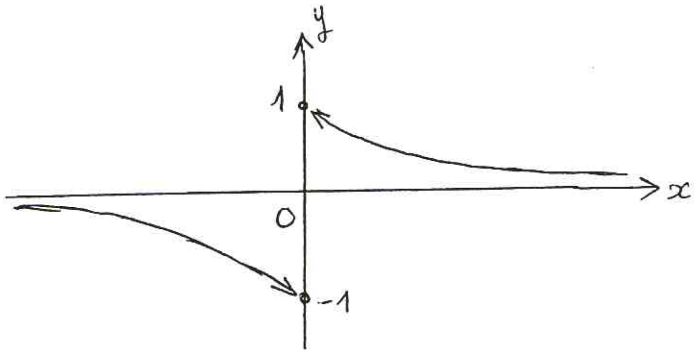
$u=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $v=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire

$$x=\mathrm{Log}\frac{5+\sqrt{5}}{2}\ ,\ y=\mathrm{Log}\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 8.– 1) f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est impaire. On a, $\forall x\neq 0$,

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2\,\mathrm{ch}^2\frac{1}{x}}$, donc f est strictement décroissante.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘	-1	‖	1 ↘	0

2) Remarquons d'abord que

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x$$

En effet $\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}y\,\mathrm{ch}x=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})(e^y+e^{-y})+\frac{1}{4}(e^y-e^{-y})(e^x+e^{-x})$

$=\frac{1}{4}(e^{x+y}-e^{-x+y}+e^{x-y}-e^{-x-y}+e^{x+y}-e^{x-y}+e^{-x+y}-e^{-x-y})$

$=\frac{1}{4}(2e^{x+y}-2e^{-x-y})=\mathrm{sh}(x+y)$

D'où l'on déduit que $\mathrm{sh}\,2x=2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$

La fonction à étudier est définie sur $\mathbb{R}^*$ et elle est paire.

$\forall x>0,\quad g'(x) = \operatorname{th}\frac{1}{x} - \frac{1}{x\operatorname{ch}^2\frac{1}{x}} = \frac{x\operatorname{sh}\frac{1}{x}\operatorname{ch}\frac{1}{x} - 1}{x\operatorname{ch}^2\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{2}{x} - 1}{x\operatorname{ch}^2\frac{1}{x}}$

On sait que $\operatorname{sh} u > u,\ \forall u>0$ (si $\varphi(x) = \operatorname{sh} x - x$, on a $\varphi'(x) = \operatorname{ch} x - 1 > 0$, $\forall x>0$; donc φ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et, $\forall u>0$, $\varphi(u) > \varphi(0)$, i.e. $\operatorname{sh} u > u$)

Par conséquent, $\forall x>0$, $\operatorname{sh}\frac{2}{x} > \frac{2}{x}$ et $\frac{x}{2}\operatorname{sh}\frac{2}{x} > 1$; donc $g'(x)>0$ et g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Quand $x\to 0$, $x>0$, $\frac{1}{x}\to+\infty$ et $\operatorname{th}\frac{1}{x}\to 1$; donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0\times 1 = 0$.

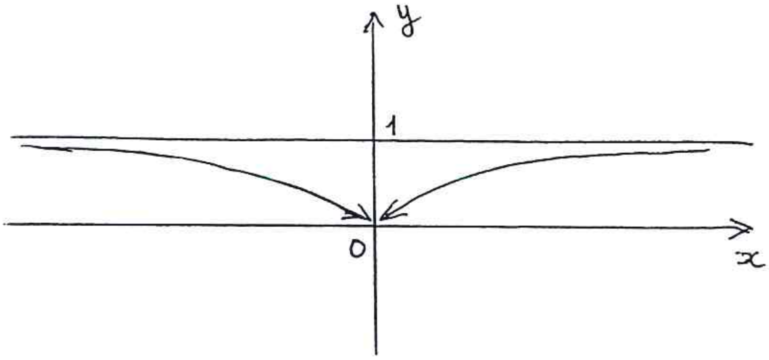
Quand $x\to+\infty$, $u=\frac{1}{x}\to 0$. Alors

$$g(x) = \frac{1}{u}\operatorname{th} u = \frac{1}{u}\cdot\frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{1}{u}\cdot\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = 2\,\frac{e^{2u}-1}{2u}\cdot\frac{1}{e^{2u}+1}$$

$$\longrightarrow 2\times 1\times\frac{1}{2} = 1.$$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$0\ \Vert\ 0$	$\nearrow$	1



3) La fonction est définie $\forall x\in\mathbb{R}$.

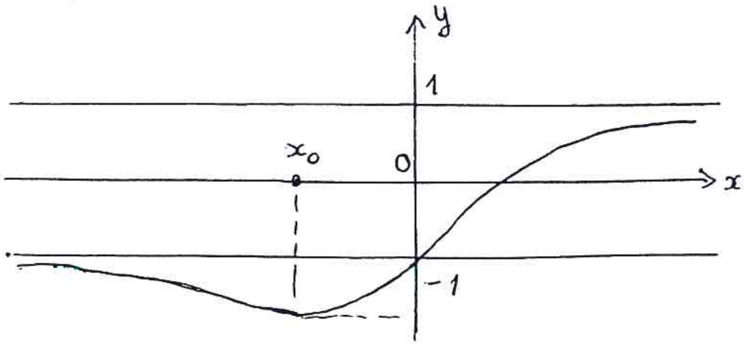
$\forall x\in\mathbb{R},\quad h'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$

$\operatorname{sh} x + 1 > 0 \iff \operatorname{sh} x > -1 \iff x > x_0 = \operatorname{Argsh}(-1)$. Donc $x_0<0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		x_0		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$	-1	$\searrow$	$h(x_0)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1



Exercice 10.— 1) $2^{\sin^2 x} \geqslant 2^0 = 1$ et $\cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Donc nécessairement $\quad 2^{\sin^2 x} = 1 = \cos x$

d'où $\sin^2 x = 0$ et $\cos x = 1$. Par conséquent $x = k\pi$ et $x = 2k'\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$. Finalement $\quad x = 2k'\pi$, $k' \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin(\cos x) = \cos(\sin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right)$.

Donc $\quad \cos x = \frac{\pi}{2} - \sin x + 2k\pi$ ou $\cos x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

i.e $\quad \cos x + \sin x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\cos x - \sin x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\qquad (1)$

Remarquons que $-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$ et $-2 \leq \cos x - \sin x \leq 2$.

Remarquons aussi que $k \geqslant 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \geqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi > 2\pi > 6$ et que $k \leq -1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2} < -\frac{6}{2} = -3$. Par conséquent, dans (1), on a nécessairement $k = 0$

Autrement dit $\qquad \cos x + \sin x = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$

ou $\qquad \cos x - \sin x = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$

(2) s'écrit $\qquad \cos x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\pi}{2}$

donc $\qquad \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > 1{,}11\ldots$

c'est-à-dire $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 1$, ce qui est impossible.

(3) s'écrit $\qquad \cos x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\pi}{2}$

donc $\qquad \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} > 1$

c'est-à-dire $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) > 1$, ce qui est impossible.

Donc l'équation donnée n'a pas de solution.

3) Posons $u = e^x$: $\operatorname{ch} x = \sqrt{5} \iff u + \frac{1}{u} = 2\sqrt{5}$

$\iff u^2 - 2\sqrt{5}\,u + 1 = 0$. $\qquad \Delta' = 5 - 1 = 4$, d'où les racines $\sqrt{5} \pm 2$.

Les racines de l'équation proposée sont donc $x = \operatorname{Log}(\sqrt{5} \pm 2)$.

4) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2} \iff \cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\iff \cos x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \iff \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\frac{\pi}{6}$

$\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5) On pose $u = e^x$: $3\left(u+\frac{1}{u}\right)+2\left(u-\frac{1}{u}\right)=8$

ou $5u+\frac{1}{u}=8$ ou encore $5u^2-8u+1=0$.

$\Delta' = 16-5 = 11$, d'où les racines $\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}$.

Les racines de l'équation donnée sont donc $x = \mathrm{Log}\,\frac{4\pm\sqrt{11}}{5}$

6) Rappelons d'abord que $\mathrm{ch}(x-y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Remarquons que

$$\mathrm{ch}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt3}+\sqrt3\right) = \frac{1+3}{2\sqrt3} = \frac{2}{\sqrt3}$$

et que $\mathrm{sh}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt3}-\sqrt3\right) = \frac{1-3}{2\sqrt3} = -\frac{1}{\sqrt3}$.

L'équation proposée s'écrit $\frac{2}{\sqrt3}\mathrm{ch}x + \frac{1}{\sqrt3}\mathrm{sh}x = \mathrm{ch}\,5x$

c'est-à-dire $\mathrm{ch}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}\right)\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}\left(\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}\right)\mathrm{sh}x = \mathrm{ch}\,5x$

ou encore $\mathrm{ch}\left(x - \mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}\right) = \mathrm{ch}\,5x$

Donc $x - \mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3} = 5x$ ou $x - \mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3} = -5x$

c'est-à-dire $4x = -\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}$ ou $6x = \mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}$

D'où les deux racines de l'équation proposée

$$x = -\frac{1}{4}\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{6}\mathrm{Log}\frac{1}{\sqrt3}.$$

Exercice 11.- $y = \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ .. Donc $y = -\frac{\pi}{3}$.

Exercice 12.- Dérivons, pour $x \neq 0$, la fonction figurant au 1er membre :

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Donc cette fonction est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$.

En $x = -1$, elle vaut $\operatorname{Arctg}(-1) + \operatorname{Arctg}(-1) = 2\operatorname{Arctg}(-1) = -2\operatorname{Arctg} 1 = -\frac{\pi}{2}$.

En $x = 1$, elle vaut $\operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$, D'où le résultat.

Exercice 13.- $y = \operatorname{Arcsin} x \iff -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin y = x$

On a donc $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ dans tout le domaine de définition de Arcsin, c'est-à-dire $\forall x \in [-1, 1]$.

sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et Argsh est sa bijection réciproque.

Donc $\quad \operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) \iff -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } \sin y = \sin\theta$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } y = \theta \quad \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \text{ est injective}\right)$$

Donc $\quad \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta, \quad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Argsh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sh est sa bijection réciproque.

Donc $\quad \operatorname{Argsh}(\operatorname{sh} u) = u, \quad \forall u \in \mathbb{R}$.

$$y = \operatorname{Arctg} x \iff -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ et } \operatorname{tg} y = x$$

donc $\quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \operatorname{Argth} x \iff -1 < x < 1 \text{ et } \operatorname{th} y = x$$

donc $\quad \operatorname{th}(\operatorname{Argth} x) = x, \quad \forall x \in]-1, 1[$.

$$y = \operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}\theta) \iff -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ et } \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\theta$$

$$\iff -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ et } y = \theta \quad \left(\operatorname{tg}\big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \text{ est injective}\right)$$

Donc $\quad \mathrm{Arctg}(\mathrm{tg}\,\theta) = \theta \qquad \forall\, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned} y = \mathrm{Argth}(\mathrm{th}\,u) &\iff -1 < \mathrm{th}\,u < 1 \text{ et } \mathrm{th}\,y = \mathrm{th}\,u \\ &\iff \mathrm{th}\,y = \mathrm{th}\,u \qquad (\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[) \\ &\iff y = u \qquad (\mathrm{th} \text{ est injective}) \end{aligned}$$

Donc $\quad \mathrm{Argth}(\mathrm{th}\,u) = u, \ \forall\, u \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 15.</u>– 1) f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[= D$.

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{1-2x^2+x^4+x^2} = \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}$$

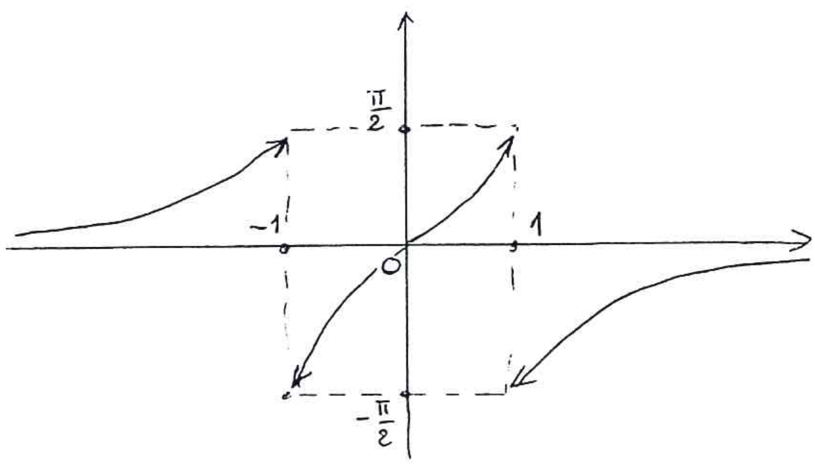
Le trinôme x^4-x^2+1 n'a pas de racines réelles ($\Delta = 1-4 = -3$) donc il est toujours >0. La fonction est donc strictement croissante. La fonction est impaire.

Quand $x \to +\infty$, $\frac{x}{1-x^2} \to 0$, donc $f(x) \to 0$.

Quand $x \to 1, x<1$, $\frac{x}{1-x^2} \to +\infty$, donc $f(x) \to \frac{\pi}{2}$.

Quand $x \to 1, x>1$, $\frac{x}{1-x^2} \to -\infty$, donc $f(x) \to -\frac{\pi}{2}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	1	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ ‖ $-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0



2) g est définie pour tout x tel que $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$ i.e. tel que $-1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2$ ou encore $-(1+x)^2 = -1-2x-x^2 \leq 0$ et $0 \leq 1-2x+x^2 = (1-x)^2$, autrement dit pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est de plus continue sur $\mathbb{R}$,

Elle est dérivable en tout point où $x \longmapsto g_1(x) = \text{Arcsin}\,\dfrac{2x}{1+x^2}$ l'est, c'est-à-dire en tout point où $\dfrac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1$, c'est-à-dire encore en tout point $x \neq \pm 1$.

La fonction g est impaire. On a, $\forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$

$$g_1'(x) = \frac{\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2-2x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}$$

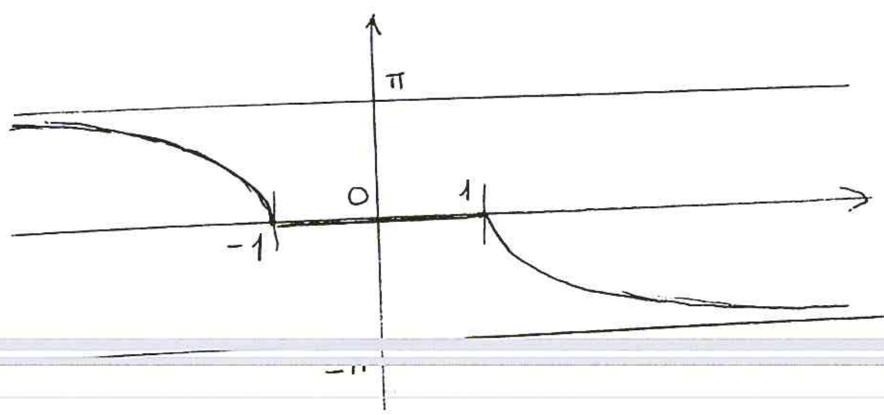
$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|x^2-1|}$$

Si $0 \leq x < 1$, $\quad g'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} - \dfrac{2}{1+x^2} = 0$

Si $x > 1$, $\quad g(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x^2-1)} - \dfrac{2}{1+x^2} = -\dfrac{4}{1+x^2} < 0$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{2x}{1+x^2} \longrightarrow 0$, $\text{Arcsin}\,\dfrac{2x}{1+x^2} \longrightarrow 0$ et ~~...~~ $g(x) \longrightarrow -\pi$. Comme $g(0)=0$, on a $g(x)=0$ $\forall x \in [0,1]$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|$		0		$\|$	$-$	
$g(x)$	π	$\searrow$	$\|$		0		$\|$	$\searrow$	$-\pi$

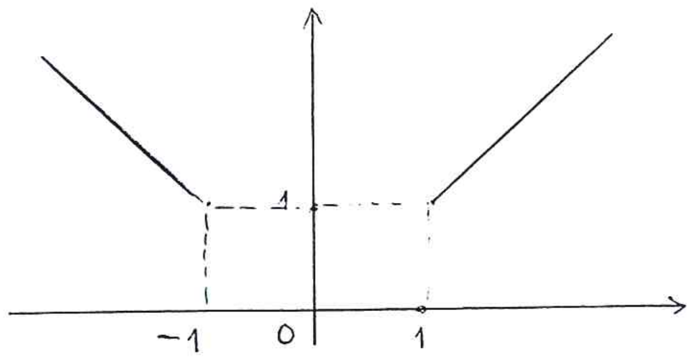


3) h est définie sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[= D$. Elle est paire et continue sur D.
Elle est dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
Calculons $h'(x)$ pour $x > 1$:

$$h'(x) = sh(\text{Arg}\,sh\,\sqrt{x^2-1})\,\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x^2-1})^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2-1}}{|x|\sqrt{x^2-1}} = 1 \quad (\text{car } x>0)$$

Donc $h(x) = x + \text{cte}$; comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} h(x) = ch(\text{Arg}\,sh\,0) = ch\,0 = 1$, la constante est nulle et $h(x) = x$, $\forall x \in [1,+\infty[$.



4) On doit avoir $-1 \leq 2x-1 \leq 1$ pour que $\text{Arcsin}(2x-1)$ soit définie. Donc $0 \leq 2x$, i.e. $0 \leq x$ et $2x \leq 2$, i.e. $x \leq 1$. On doit donc avoir déjà $0 \leq x \leq 1$. (1)

Pour que $\text{Arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ soit définie il faut et il suffit que $x \neq 0$ et $\frac{1-x}{x} \geq 0$ i.e. $1-x \geq 0$ et $x>0$ c'est-à-dire $0 < x \leq 1$ (2)

ou $1-x \leq 0$ et $x<0$, ce qui est impossible. Finalement (1) et (2) montrent que k est définie sur $D =]0,1]$. Elle y est continue et elle est dérivable sur $]0,1[$. Posons $k_1(x) = \text{Arcsin}(2x-1)$, $k_2(x) = \text{Arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

On a, $\forall x \in]0,1[$, $$k_1'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \;;$$

$$k_2'(x) = \frac{2}{1+\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{\frac{-x-(1-x)}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \frac{x}{x+1-x}\cdot\frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = -\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (\text{car } x>0) \;;\; \text{donc } k'(x) = 0.$$

k est donc constante sur $]0,1]$.

$k(1) = \text{Arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2}$; par conséquent $k(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in]0,1]$.

Exercice 14.— 1) Si $x \geqslant 1$, $y = \text{Argch}x \Leftrightarrow x = \text{ch}y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

d'où $2x = \frac{e^{2y}+1}{e^y} \iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$

Posons $f(X) = X^2 - 2xX + 1$; e^y est solution de l'équation

$$f(X) = 0$$

dont les solutions sont $x \pm \sqrt{x^2-1}$. Supposons $x > 1$.

D'une part $y = \text{Argch}\, x \Rightarrow y > 0 \Rightarrow e^y > 1$.

D'autre part $f(1) = 2(1-x) < 0$; par conséquent 1 est situé entre les deux racines de l'équation $f(X) = 0$. Par conséquent e^y est nécessairement égale à la plus grande, c'est-à-dire

$$e^y = x + \sqrt{x^2-1} \quad , \text{ d'où } \quad y = \text{Log}(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad (1)$$

Revenons au cas $x = 1$ que nous avons laissé de côté. Si $x = 1$, $y = \text{Argch}\, 1 = 0$ et $\text{Log}(x + \sqrt{x^2-1}) = \text{Log}\, 1 = 0$, donc (1) est encore vraie.

2) $y = \text{Argsh}x \iff x = \text{sh}y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

d'où $2x = \frac{e^{2y}-1}{e^y} \iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

e^y est solution de l'équation $X^2 - 2xX - 1 = 0$ dont les solutions sont $x_1 = x + \sqrt{x^2+1}$ et $x_2 = x - \sqrt{x^2+1}$. Comme $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$, nécessairement $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ et $y = \text{Log}(x + \sqrt{x^2+1})$

3) $y = \text{Argth}x \iff -1 < x < 1$ et $\text{th}y = x$

D'où $x = \text{th}y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \iff xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$

$$\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff y = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{1+x}{1-x}$$

Exercice 16.— 1) Le premier membre de (1) est défini pour $-1 \leq x \leq 1$.

Etudions la fonction $x \mapsto f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$.

$\forall x \in]-1,1[$,

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-2x^2-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 1 \ ; \ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$

D'où le tableau de variation

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Par conséquent $2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]$, $\forall x \in [-1,1]$. Ainsi les deux membres de (1) sont définis pour $x \in [-1,1]$.

Calculons la dérivée de la fonction $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2\,\mathrm{Arcsin}\,x - \mathrm{Arc}\sin(2x\sqrt{1-x^2})$; on a, $\forall x \in]-1,1[$, $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \cdot \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}}$$

Pour $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $1-2x^2 > 0$, donc

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 .$$

$g(0) = 0$; comme g est continue sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a $g(x) = 0$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Pour $-1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$, $1-2x^2 < 0$ et

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2(1-2x^2)}{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

g est donc strictement croissante sur $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ de $g(-1) = -\pi$ à $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ et g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ de $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ à $g(1) = \pi$. En résumé

$$g(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ = 0 & \text{si } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ > 0 & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1 \end{cases}$$

Les solutions de (1) sont donc tous les réels de l'intervalle $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

2) Posons $f(x) = \text{Arctg}(x-1) + \text{Arctg}\, x + \text{Arctg}(x+1)$.
f, somme de trois fonctions strictement croissantes, est strictement croissante. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{3\pi}{2}$. Par conséquent f prend une fois et une seule toute valeur $y_0 \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ (i.e. f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$).

Il en résulte que l'équation (2) possède une unique solution x_0. Comme $f(0) = \text{Arctg}(-1) + \text{Arctg}\, 1 = -\text{Arctg}\, 1 + \text{Arctg}\, 1 = 0$, on sait que $x_0 > 0$.
L'équation (2) s'écrit
$$\text{Arctg}(x-1) + \text{Arctg}(x+1) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\, x \qquad (3)$$

x_0 vérifie donc cette égalité. On a donc
$$\text{tg}(\text{Arctg}(x_0-1) + \text{Arctg}(x_0+1)) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\, x_0\right) = \frac{1}{\text{tg}(\text{Arctg}\, x_0)} = \frac{1}{x_0}$$
i.e.
$$\frac{\text{tg}(\text{Arctg}(x_0-1)) + \text{tg}(\text{Arctg}(x_0+1))}{1 - \text{tg}(\text{Arctg}(x_0-1))\,\text{tg}(\text{Arctg}(x_0+1))} = \frac{1}{x_0}$$

Donc x_0 est solution de l'équation $\frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x}$

soit $\frac{2x}{1-(x^2-1)} = \frac{1}{x}$ ou encore $2x^2 = 2 - x^2$ i.e. $x^2 = 2$ (4)

dont les racines sont $\pm\sqrt{2}$. Nécessairement $x_0 = \sqrt{2}$.

Remarque. — On n'a pas (3) $\Leftrightarrow$ (4) parce que $a = b \Rightarrow \text{tg}\, a = \text{tg}\, b$ et non pas $a = b \Leftrightarrow \text{tg}\, a = \text{tg}\, b$, ce qui explique la solution « parasite » $-\sqrt{2}$.

<u>Exercice 17.</u>– 1) g est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[= D$.

2) $\forall x \in D$,

$$g'(x) = \frac{\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2}}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

3) Posons $f(x) = \text{Arctg}\, x$, $\forall x \in I =]-\infty, 1[$.

$\forall x \in I$, $\quad g'(x) - f'(x) = 0$, donc $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ g(x) = f(x) + c$

$g(0) = \text{Arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$ et $f(0) = 0$; par conséquent $c = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 1.– Les équations suivantes ont-elles des solutions ? Si oui, les déterminer.

a) $\text{Arccos}\, x + \text{Arctg}\, x = 0$; b) $\text{Arcsin}\, x + \text{Arctg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$;

c) $\text{Arccos}\, x + \text{Arctg}\,\frac{1}{2} = \pi$.

Solution.— a) $\text{Arccos}\, x + \text{Arctg}\, x = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Arccos}\, x = -\text{Arctg}\, x = \text{Arctg}(-x) \qquad (1)$$

Si $0 < x \leqslant 1$, $\text{Arccos}\, x > 0$; $-x < 0$, donc $\text{Arctg}(-x) < 0$ et (1) n'a pas de solution.

Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $\text{Arccos}\, x \geqslant \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg}(-x) < \frac{\pi}{2}$, donc (1) n'a pas de solution.

b) Rappelons que, $\forall t \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}\, t) = t$.

$$\text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{4} - \text{Arctg}\,\frac{1}{3} \Rightarrow x = \sin(\text{Arcsin}\, x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = \sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right)$$

Rappelons aussi que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{tg}(\text{Arctg}\, x) = x$.

On a $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$; comme $0 < \text{Arctg}\,\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right) > 0$,

donc $$\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

On a $$\sin\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right) = \text{tg}\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right)\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Finalement $$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

c) Rappelons que, $\forall t \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arccos}\, t) = t$.

$$\text{Arccos}\, x = \pi - \text{Arctg}\,\frac{1}{2} \Rightarrow x = \cos(\text{Arccos}\, x) = \cos\left(\pi - \text{Arctg}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{2}\right)$$

Comme $0 < \text{Arctg}\,\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{2}\right) > 0$ et

$$\cos\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\left(\text{Arctg}\,\frac{1}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ; donc } x = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 2.— Calculer Arctg 1 + Arctg 2 + Arctg 3.

Solution.— Posons $x = \text{Arctg}\,1 + \text{Arctg}\,2 + \text{Arctg}\,3$

et $u = \text{Arctg}\,1 + \text{Arctg}\,2$

$$\text{tg}\,u = \frac{\text{tg}\,(\text{Arctg}\,1) + \text{tg}\,(\text{Arctg}\,2)}{1 - \text{tg}\,(\text{Arctg}\,1)\,\text{tg}\,(\text{Arctg}\,2)} = \frac{1+2}{1-2} = -3$$

$$\text{tg}\,x = \text{tg}\,(u + \text{Arctg}\,3) = \frac{\text{tg}\,u + \text{tg}\,(\text{Arctg}\,3)}{1 - \text{tg}\,u\,\text{tg}\,(\text{Arctg}\,3)} = \frac{-3+3}{1+9} = 0$$

Par conséquent x est de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais $x > 0$, donc x est de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs

$\text{Arctg}\,1 + \text{Arctg}\,2 + \text{Arctg}\,3 < \frac{3\pi}{2}$

et $\text{Arctg}\,3 > \text{Arctg}\,2 > \text{Arctg}\,1 = \frac{\pi}{4}$, donc $\text{Arctg}\,1 + \text{Arctg}\,2 + \text{Arctg}\,3 > \frac{3\pi}{4}$

On a donc $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, et $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$. Donc $x = \pi$.

Exercice 3.— Calculer, lorsque cela est possible,

a) $\text{Arc}\sin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; b) $\sin\left(\text{Arc}\sin\,\frac{1}{5}\right)$; c) $\text{Arctg}\left(\text{tg}\,\frac{\pi}{7}\right)$; d) $\text{Arctg}\left(\text{tg}\,\frac{82\pi}{11}\right)$;

e) $\text{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; f) $\cos\,(\text{Arc}\cos\,10)$; g) $\text{Arc}\cos\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$.

Solution.– a) $y = \text{Arc}\sin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin y = \sin\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Or $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$. D'où $y = \frac{\pi}{3}$.

b) Rappelons que $y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ et $\sin y = x$

donc $\sin\,(\text{Arc}\sin x) = x$ dans tout le domaine de définition de Arc sin , c'est-à-dire $\forall x \in [-1, 1]$.

Donc $\sin\left(\text{Arc}\sin\,\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$.

c) $y = \text{Arctg}\left(\text{tg}\frac{\pi}{7}\right) \iff \text{tg}\, y = \text{tg}\frac{\pi}{7}$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, d'où $y = \frac{\pi}{7}$.

d) $y = \text{Arctg}\left(\text{tg}\frac{82\pi}{11}\right) \iff \text{tg}\, y = \text{tg}\frac{82\pi}{11}$ et $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Or $\frac{82\pi}{11} = \frac{77\pi}{11} + \frac{5\pi}{11} = 7\pi + \frac{5\pi}{11}$ donc $\text{tg}\frac{82\pi}{11} = \text{tg}\frac{5\pi}{11}$.

Comme $-\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{11} < \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{5\pi}{11}$.

e) $y = \text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0 \leq y \leq \pi$.

Or $\cos y = -\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$, d'où $y = \frac{5\pi}{6}$

f) Arccos est définie sur $[-1, 1]$, donc Arccos 10 n'a aucun sens.

g) $y = \text{Arccos}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right) \iff \cos y = \cos\frac{5\pi}{4}$ et $0 \leq y \leq \pi$.

Or $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4}$, d'où $y = \frac{3\pi}{4}$.

Exercice 4.– Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

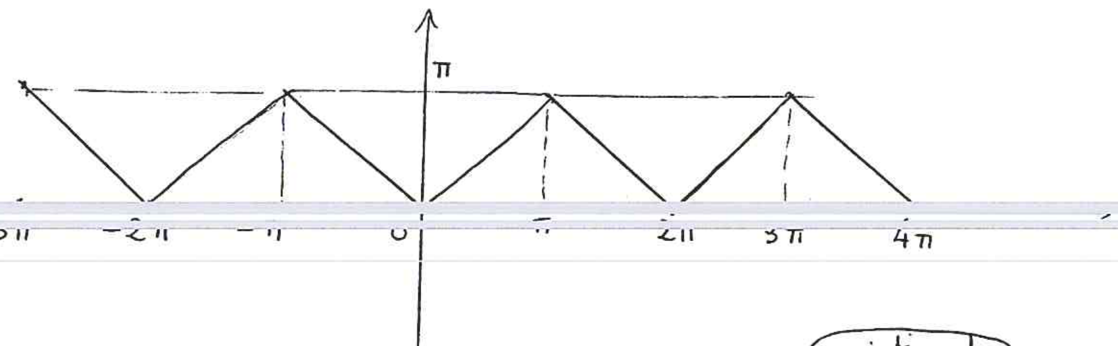
$$f(x) = \text{Arccos}(\cos x)$$

Solution.– f est évidemment 2π-périodique. Donc il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Elle est aussi paire, donc il suffit de l'étudier sur $[0, \pi]$.

Or $y = \text{Arccos}(\cos x) \iff \cos y = \cos x$ et $0 \leq y \leq \pi$

Donc $\text{Arccos}(\cos x) = x$, $\forall\, x \in [0, \pi]$.

D'où le graphe :



Exercice 5.– Trouver le domaine de définition et étudier les variations des fonctions suivantes

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \quad g(x) = \text{Arcsin}(\text{Arcsin}\, x)$$

Solution.– $f(x)$ est définie pour $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$, autrement dit pour $-1-x^2 \leq 2x \leq 1+x^2$ ou encore pour $0 \leq 1+x^2+2x = (1+x)^2$ et $0 \leq 1+x^2-2x = (1-x)^2$, ce qui est toujours vérifié. Donc f est définie dans $\mathbb{R}$. Elle est impaire. On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{2x}{1+x^2} \neq \pm 1$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

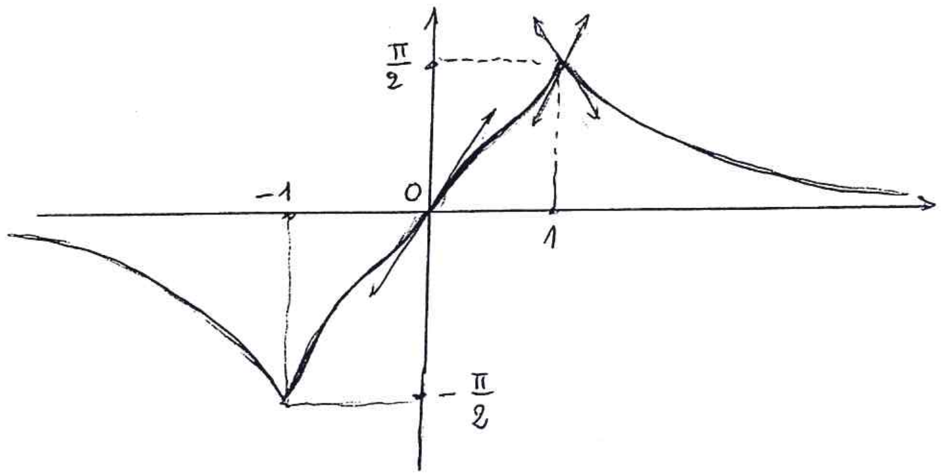
$$f'(x) = \frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2-2x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4-2x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|}$$

On étudie $f(x)$ sur $[0,+\infty[$ à cause de l'imparité.

Donc $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$, si $0 \leq x < 1$; $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$, si $1 < x$.

x				0		1		$+\infty$
$f'(x)$				2	+	‖	−	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0



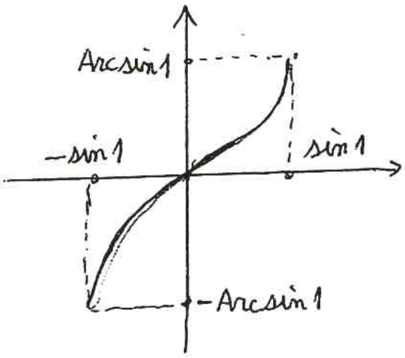
$g(x)$ est définie pour $-1 \leq \operatorname{Arcsin} x \leq 1$, autrement dit pour $-\sin 1 = \sin(-1) \leq \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x \leq \sin 1$ ($\sin$ est croissante sur $[-1, 1] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est impaire.

On a, $\forall x \in]-\sin 1, \sin 1[$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathrm{Arcsin}\,x)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

x	$-\sin 1$		0		$\sin 1$
$g'(x)$			1	$+$	
$g(x)$	$\mathrm{Arcsin}(-1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\mathrm{Arcsin}\,1$

($\mathrm{Arcsin}(\sin x) = \sin x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\mathrm{Arcsin}(\sin 1) = 1$)



Exercice 6.– Démontrer que $\mathrm{Arctg}\,x + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$. Que peut-on dire si $x < 0$?

Solution.– Posons $f(x) = \mathrm{Arctg}\,x + \mathrm{Arctg}\,\frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Donc f est constante sur $]0, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$, on a $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$.

f est impaire, donc, si $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 7.– Résoudre l'équation

$$2\,\mathrm{Arg\,sh}\,x + \mathrm{Arg\,th}\,\frac{1}{2} = \mathrm{Arg\,ch}\,3 \qquad (1)$$

Solution.– (1) s'écrit

$$\mathrm{Arg\,sh}\,x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arg\,ch}\,3 - \mathrm{Arg\,th}\,\frac{1}{2}\right)$$

Comme $\mathrm{sh}(\mathrm{Arg\,sh}\,t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$x = \mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{Arg\,ch}\,3 - \mathrm{Arg\,th}\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathrm{Arg\,ch}\,3 = \mathrm{Log}(3 + \sqrt{9-1}) = \mathrm{Log}(3 + 2\sqrt{2})$$

$$\mathrm{Argth}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,3 = \mathrm{Log}\,\sqrt{3}$$

Alors $\frac{1}{2}\left(\mathrm{Argch}\,3 - \mathrm{Argth}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Log}\,(3+2\sqrt{2}) - \mathrm{Log}\,\sqrt{3}\right]$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \mathrm{Log}\,\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$$

Finalement $\quad x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}}}\right)$

Exercice 8.– Résoudre l'équation $\quad \mathrm{Argch}\,x = \mathrm{Argsh}\,(x-2) \qquad (1)$

Solution.–

(1) équivaut à $\quad \mathrm{Log}\,(x-\sqrt{x^2-1}) = \mathrm{Log}\,(x-2+\sqrt{(x-2)^2+1})$

et par injectivité de la fonction Log à

$$x - \sqrt{x^2-1} = x-2+\sqrt{x^2-4x+5}$$

ou encore $\quad \sqrt{x^2-4x+5} = 2 - \sqrt{x^2-1} \qquad (2)$

Si x est solution de (2) on a nécessairement

$$x^2-4x+5 = 4-2\sqrt{x^2-1}+x^2-1$$

ou $\quad -4x+2 = -2\sqrt{x^2-1}$

ou encore $\quad -2x+1 = -\sqrt{x^2-1} \qquad (3)$

Si x est solution de (3) on a nécessairement

$$4x^2-4x+1 = x^2-1$$

ou encore $\quad 3x^2-4x+2=0$

équation du second degré en x dont le discriminant réduit $\Delta' = 4-6$ est <0 ; elle n'a donc pas de solution réelle et (1) non plus.