Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2015

Série d'exercices n°1/6
Autour des réels

Exercice 1 : rationnels ou décimal ?

1. Soit $A_n = 0,201420142014...2014$ (n fois). Ecrire A_n sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit $A = 0,201420142014...$ (une infinité de fois). Ecrire A sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
3. (en option) Même question que la 2. pour le nombre rationnel
$$P = 0,11111... + 0,22222.... + 0,33333 + ... + 0,99999....$$

Exercice 2 : calcul de racine

Montrer que le nombre réel
$$\gamma = \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$$
est une entier naturel que l'on déterminera.
On en profitera pour rappeler la formule $(a + b)^3$, ainsi que le formule générale $(a + b)^n$.

Exercice 3 : racine et valeur absolue

Le but de cet exercice est de trouver les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation
$$(1) \quad \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

1. Montrer que x est solution de (1) si et seulement si
$$(2) \quad |\sqrt{x - 1} - 2| + |\sqrt{x - 1} - 3| = 1.$$
2. Trouver les solutions $u \in \mathbb{R}$ de l'équation
$$(3) \quad |u - 2| + |u - 3| = 1.$$
3. Conclure

Exercice 4 : autour des valeurs absolues

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les inégalités suivantes
   (a) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   (b) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.
   (c) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$.
   (d) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$A(x) = \frac{|x|}{1 + |x|}.$$
   Montrer que quels que soient les réels x et y, on a $A(x + y) \leq A(x) + A(y)$.

Exercice 5 : autour des parties entières

1. Soient x et y deux réels. Démontrer les égalités et inégalités suivantes
   (a) $E(x + 1) = E(x) + 1$,
   (b) $E(x) + E(y) \leq E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$,
   (c) $E(x) + E(y) + E(x + y) \leq E(2x) + E(2y)$,
   (d) $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = E(x)$.
   Indication : pour cette dernière égalité, on distinguera les cas $E(x)$ pair et $E(x)$ impair.
   (e) On suppose en plus que $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x).$$

Exercice 6 : minimum et maximum

Soient x et y deux réels.

1. Montrer que
$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et } \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$
2. Soit $z \in \mathbb{R}$. Peut-on trouver une formule pour $\max(x, y, z)$?

Exercice 7 : inf, sup

Soit $A = \{x^2 + y^2;\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},\ xy = 1\}$.

1. Montrer que A possède une borne inférieure que l'on déterminera.
2. A possède-t-elle une borne supérieure ?

Exercice 8 : inf, sup- vrai, faux

Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{aligned} -A &= \{-a; a \in A\}, & A+B &= \{a+b; a \in A, b \in B\}, \\ x+A &= \{x+a; a \in A\}, & AB &= \{ab; a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, les justifier, si elles sont fausses, donner un contre exemple.

1. si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$,
2. si $A \subset B$ alors $\inf A \leq \inf B$,
3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$,
5. $\inf(-A) = -\sup A$,
6. $\sup(x+A) = x + \sup A$,
7. $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Exercice 9 : défis (en option)

Quelques exercices un peu plus difficiles.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$
   (b) En déduire une partie entière du nombre réel
   $$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{10000}} +$$
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
   $$0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n-1.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer en utilisant la formule du binôme de Newton que
   $$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$
   est un entier pair.
   (b) En déduire que $E((2+\sqrt{3})^n)$ est un entier impair.
4. Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par
   $$A = \left\{ \frac{m}{mn+1}; m, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$
   Montrer que A possède une borne supérieure et une borne inférieure et les calculer.

Exercice 10 : autour de $\sqrt{2}$ (en option)

1. On considère $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $r = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
   (a) Montrer par l'absurde que $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (b) De la même manière, montrer que si $r \neq 0$ alors $rx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Est-ce que $\sqrt{2}$ est rationnel ? Supposons que oui et écrivons $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, où p et q sont premiers entre eux.
   (a) Elever l'égalité précédente au carré.
   (b) Etudier la parité de p^2.
   (c) Etudier la parité de q^2.
   (d) Conclure sur la rationalité de $\sqrt{2}$.
3. Considérons deux rationnels r et r', tels que $r < r'$. Notons $x = r + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$.
   (a) Montrer que $x \in]r, r'[$.
   (b) Déduire de ce qui précède que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (c) Quel résultat général peut-on conclure de cela ?

Exercice 10

1. a. $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Par l'absurde : supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe $p' \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Et donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'}$ où $qp' - pq' \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{Z}^*$

c'est à dire $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ contradiction. Donc $r + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b. Supposons par l'absurde que $rx \in \mathbb{Q}$ alors il existe p' et q', $p' \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ t.q.

$rx = \frac{p'}{q'}$ et donc $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ car $p'q \in \mathbb{Z}$ et $q'p \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow$ contradiction

2. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ avec p et q premiers entre eux t.q. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (fraction irréductible)

a) On élève au carré : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ c.à.d : $p^2 = 2q^2$

b) Donc p^2 est pair. Donc p aussi est pair. En effet : "si $p \in \mathbb{Z}$ p est pair $\Leftrightarrow p^2$ est pair"

$\boxed{\Rightarrow}$ p pair $\Rightarrow p^2$ pair : si $p = 2a$ $(a \in \mathbb{Z})$ alors $p^2 = 4a^2$

c.à.d $p^2 = 2[2a^2]$

$\Rightarrow p^2$ est pair

$\boxed{\Leftarrow}$ se démontre par contraposée (c.à.d qu'au lieu de montrer p^2 pair $\Rightarrow p$ pair on montre "p impair $\Rightarrow p^2$ impair")

si p est impair, $p = 2a+1$, $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2[2a^2 + 2a] + 1$

$= 2b + 1$ impair $(b \in \mathbb{Z})$

Autrement dit on peut écrire $p = 2a$ où $a \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2 = 4a^2$ or $p^2 = 2q^2$

c) Par conséquent $4a^2 = 2q^2$ c.à.d $q^2 = 2a^2 \Rightarrow q^2$ est pair $\Rightarrow q$ est pair

donc $q = 2b$ $(b \in \mathbb{Z})$.

d) $\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ c.à.d $\frac{p}{q}$ non irréductible $\Rightarrow$ contradiction $\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3. $r<r'$ $\quad x = r+\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r)$

a. $\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ (évident) et $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ car $\sqrt{2}<2$ $(2<4)$

$\Rightarrow 0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

$r'-r>0 \Rightarrow 0<\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r)<r'-r$

$\Rightarrow r<r+\frac{\sqrt{2}}{2}(r'-r)<r'-r+r=r' \iff r<x<r'$

b. D'après 1) et 2) $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\frac{r'-r}{2}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

et $r\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow r+\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{2}\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Et donc x est un nombre irrationnel entre r et r'

c. Entre 2 nombres rationnels il existe toujours un nombre irrationnel

Exercice 1

1. $A_n = 0,2014\,2014\,2014\ldots 2014$ (n fois)

$= 2014\,2014\ldots 2014 \times 10^{-4n}$. On pose $p = 2014\ldots 2014$ (n fois) et $q=10^{4n}$

alors $A_n = \frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}^*$

2. $A = 0,2014\,2014\ldots$ Remarquons que $10\,000\,A = 2014,2014\,2014\,2014\ldots$

Alors $10\,000\,A - A = 2014$

càd $9999\,A = 2014 \Rightarrow A = \frac{2014}{9999}$

3. $P = 0,111\ldots + 0.222\ldots + 0.333\ldots + \ldots + 0.999\ldots$

$= \frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\ldots+\frac{9}{9} = \frac{1+2+\ldots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$

Exercice 2

$a = 27+6\sqrt{21}$ $\quad b = 27-6\sqrt{21}$

$a^{2/3}b^{1/3}+a^{1/3}b^{2/3} = a^{1/3+1/3}b^{1/3}+a^{1/3}b^{1/3+1/3}$

$= a^{1/3}a^{1/3}b^{1/3}+a^{1/3}b^{1/3}b^{1/3}$

$= a^{1/3}b^{1/3}\left[a^{1/3}+b^{1/3}\right]$

Rappel : $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\gamma^3 = \cancel{27+6\sqrt{21}} + 3(27+6\sqrt{21})^{2/3}(27-6\sqrt{21})^{1/3} + 3(27+6\sqrt{21})^{1/3}(27-6\sqrt{21})^{2/3} + \cancel{27-6\sqrt{21}}$

$= 54 + 3\left[(27+6\sqrt{21})(27-6\sqrt{21})\right]^{1/3}\left[(27+6\sqrt{21})^{1/3}+(27-6\sqrt{21})^{1/3}\right]$

$= 54+3\left[729-756\right]^{1/3}.\gamma = 54+3(-27)^{1/3}.\gamma = 54-9\gamma$

γ est donc racine de l'équation : $x^3+9x-54=0$

Racine évidente : 3 $\Rightarrow x^3+9x-54 = (x-3)(x^2+kx+18)$

$$= x^3 + kx^2 + 18x - 3x^2 - 3kx - 54$$

$$= x^3 + (k-3)x^2 + (18-3k)x - 54 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow x^3 + 9x - 54 = (x-3)(x^2+3x+18) \qquad x^2+3x+18 \quad \Delta = 9 - 4.18 < 0$$

pas de racine réelle

La seule racine réelle est 3, donc $\gamma = 3$

Exercice 3 — On suppose $x \geq 1 \Rightarrow$ les solutions seront nécessairement dans $[1, +\infty[$

1. On remarque que $x+3-4\sqrt{x-1} = x-1-2.2\sqrt{x-1}+4 = (\sqrt{x-1}-2)^2$

$$x+8-6\sqrt{x-1} = x-1+9-2.3\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}-3)^2$$

Donc $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$ et $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$$

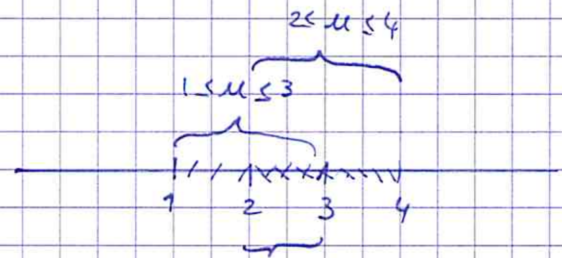
2. On pose $u = \sqrt{x-1}$.

Si $u \in \mathbb{R}$ est solution de (3) alors nécessairement

$|u-2| \leq 1$ et $|u-3| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq u-2 \leq 1 \qquad -1 \leq u-3 \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq u \leq 3 \qquad 2 \leq u \leq 4$



$\Rightarrow 2 \leq u \leq 3$

Réciproquement : si $u \in \mathbb{R}$ et $u \in [2,3]$ alors $|u-2| = u-2$ $\quad u \geq 2 \Leftrightarrow u-2 \geq 0$

et $|u-3| = 3-u$ $\quad u \leq 3 \Leftrightarrow u-3 \leq 0$

et donc $|u-2| + |u-3| = u-2+3-u = 1$

alors u est solution de (3) si et seulement si $2 \leq u \leq 3$

3. Des questions 1) et 2) il résulte que x est solution de (1) si et seulement si

$2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$\Leftrightarrow 4 \leq x-1 \leq 9$

$\Leftrightarrow 5 \leq x \leq 10$

Conclusion : Les solutions de (1) sont tous les réels de $[5;10]$.

Exercice 4

1 a. $|x|-|y| \leq |x-y|$:

$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$

$\Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$

b. $|x|+|y| \leq |x+y| + |x-y|$

Si on écrit $2x = (x+y) + (x-y)$ et $2y = (x+y) - (x-y)$

alors $2|x| = |(x+y)+(x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$

$+ \quad 2|y| = |(x+y)-(x-y)| \leq |x+y| + |x-y|$

$\Rightarrow \cancel{2}|x| + \cancel{2}|x| \leq \cancel{2}|x+y| + \cancel{2}|x-y|$

c. $1+|xy-1| \leq (1+|x-y|)(1+|y-1|)$.

On pose $u = x-1$ et $v = y-1$

$\Rightarrow xy-1 = xy+1-x-y+x-1+y-1$

$= (x-1)(y-1)+x-1+y-1$

$= uv+u+v$

$1+|xy-1| = 1+|uv+u+v|$

$\leq 1+|u|+|v|+|uv|$

$\overset{\shortparallel}{}$

$(1+|u|)(1+|v|) = (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

d. $||x|-|y|| \leq |x-y| \leq |x|+|y|$

on rappelle que si $a, b \in \mathbb{R}_+$ alors

$a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

et $|a|^2 = a^2$

cà $(|x|-|y|)^2 \leq (|x-y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2|x||y| + y^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2$

$\Leftrightarrow -\cancel{2}|x|.|y| \leq -\cancel{2}xy \leq \cancel{2}|x|.|y|$

or $|x|.|y| = |xy| = |-xy|$

$\Leftrightarrow -|xy| \leq -xy \leq |xy|$

$\Leftrightarrow -|-xy| \leq -xy \leq |-xy|$

si on pose $r = -xy$ on a $-|r| \leq r \leq |r|$

qui est vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$

- si $r \geq 0$ $r = |r|$ et donc $r \leq |r|$
  et $r \geq 0 \geq -|r|$
- si $r \leq 0$ $r = -|r|$ et donc $r \geq -|r|$
  et $r \leq 0 \leq |r|$

2. $A(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

$A(x+y) = \dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} = \dfrac{1+|x+y|-1}{1+|x+y|} = 1 - \dfrac{1}{1+|x+y|}$

or $|x+y| \leq |x|+|y| \Rightarrow 1+|x+y| \leq 1+|x|+|y|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+|x+y|} \geq \dfrac{1}{1+|x|+|y|} \Rightarrow -\dfrac{1}{1+|x+y|} \leq -\dfrac{1}{1+|x|+|y|}$

et donc $g(x) \leq 1 - \dfrac{1}{1+|x|+|y|} = \dfrac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}$

d'où $g(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|} + \dfrac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|} = g(x)+g(x)$ car $|x| \leq |x|+|y|$

$1+|x| \leq 1+|x|+|y|$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1+|x|} \geq \dfrac{1}{1+|x|+|y|}$

Exercice 5

1)

a) $E(x+1) = E(x)+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $E(x) \leq x < E(x)+1$

$(E(x)+1) \leq x+1 < (E(x)+1)+1$ comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$ on a $E(x+1) = E(x)+1$

Or $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$ et on rappelle que si $n \leq x < n+1$ alors $E(x) = n$

par conséquent ici $E(x+1) = E(x)+1$

b. $\left.\begin{array}{l} E(x) \leq x < E(x)+1 \\ E(y) \leq y < E(y)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow E(x)+E(y) \leq x+y < E(x)+E(y)+2$

or $E(x+y)$ est le plus grand entier n t.q. $n \leq x+y$

Et donc puisque $E(x)+E(y) \leq x+y$ on a : $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$

de même $E(x+y)+1$ est le plus grand entier $m > x+y$

Puisque $E(x)+E(y)+2 > x+y$ on en déduit $E(x)+E(y)+2 \geq E(x+y)+1$

et donc $E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

Finalement $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$

c. un peu plus compliqué :

on a plusieurs cas possibles : on va poser $k = E(x)$ et $l = E(y)$

alors $k \leq x < k+1$ et $l \leq y < l+1$

Comme on va utiliser $2x$ et $2y$, il faut voir si on sort de $[k, k+1[$ ou $[l, l+1[$

4 cas se présentent

① si $x \in [k, k+\frac{1}{2}[$ alors $2x \in [2k, 2k+1[$

si $y \in [l, l+\frac{1}{2}[$ " $2y \in [2l, 2l+1[$

$x+y \in [k+l ; k+l+1[$ $\quad [\underbrace{E(x)}_{k} + \underbrace{E(y)}_{l}] \leq E(x+y) < [\underbrace{E(x)}_{k} + \underbrace{E(y)}_{l}] + 1 \Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y)$

$E(x) + E(y) + E(x+y) = k + l + k + l$

$= 2k + 2l$

D'autre part $E(2x) = 2k$ et $E(2y) = 2l \Rightarrow E(2x) + E(2y) = 2k + 2l$

Dans ce cas là $E(x) + E(y) + E(x+y) = E(2x) + E(2y)$

② si $x \in [k+\frac{1}{2} ; k+1[$ alors $2x \in [2k+1 ; 2k+2[$

$x \in [l, l+\frac{1}{2}[$ — $2y \in [2l ; 2l+1[$

$x+y \in [k+l+\frac{1}{2}, k+l+\frac{3}{2}[\Rightarrow E(x+y) = k+l$ ou $k+l+1$

et $E(x) + E(y) + E(x+y) = k+l+k+l$ ou $k+l+k+l+1$

$= 2k+2l$ ou $2k+2l+1$

D'autre part $\left.\begin{array}{l} E(2x) = 2k+1 \\ E(2y) = 2l \end{array}\right\} \Rightarrow E(2x) + E(2y) = 2k+2l+1$

Dans ce cas là $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.

③ si $x \in [k ; k+\frac{1}{2}[$ $\quad y \in [l+\frac{1}{2} ; l+1[$

on a de façon identique $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$

④ $x \in [k+\frac{1}{2} ; k+1[$ $\quad y \in [l+\frac{1}{2} ; l+1[$

$E(x) + E(y) + E(x+y) = 2k + 2l + 2 = E(2x) + E(2y)$

Dans tous les cas $E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$!!

d. • Supposons que $E(x) = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$ ($E(x)$ pair)

on a : $2p \leq x < 2p+1 \Rightarrow p \leq \frac{x}{2} < p+\frac{1}{2}$ et $E(\frac{x}{2}) = p$

$< p+1$

Mais $p+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2}+\frac{1}{2} < p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = p+1$

d'où $E(\frac{x+1}{2}) = p$

Finalement $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p = E(x)$

• Supposons que $E(x) = 2p+1$, $p \in \mathbb{Z}$

On a $2p+1 \leq x < 2p+2$ d'où $\frac{2p+1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1$

c.à.d $p+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < p+1$ et $E(\frac{x}{2}) = p$

Mais $p+1 = p+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2}+\frac{1}{2} < p+1+\frac{1}{2} < (p+1)+1$

d'où $E(\frac{x+1}{2}) = p+1$

Finalement $E(\frac{x}{2}) + E(\frac{x+1}{2}) = 2p+1 = E(x)$.

e. Comme $E(x) \leq x < E(x)+1$

$\underbrace{nE(x)}_{\text{entier}} \leq nx < n(E(x)+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$nE(x)$ est un entier $\leq nx$

et $E[nx]$ le plus grand entier $\leq nx$

d'où $nE(x) \leq E[nx] \leq nx < n(E(x)+1)$

$\Rightarrow E(x) \leq \frac{E(nx)}{n} < E(x)+1$

donc $\frac{E(nx)}{n}$ est un réel y t.q. $E(x) \leq y < E(x)+1$

donc $E(x) = E(y)$ autrement dit $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$

Exercice 6

1) • Si $x \geq y$ alors $\max(x,y) = x$ et $|x-y| = x-y$ } donc $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

donc $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = x$

de même $\min(x,y) = y$ et $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = y$ ok

• Si $x \leq y$ $\max(x,y) = y$ et $|x-y| = y-x$

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y)$$

de même $\min(x,y) = x$ et $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x = \min(x,y)$

2) Soit $z \in \mathbb{R}$ $\max(x,y,z) = \max(\max(x,y), z)$

D'après la formule précédente on a:

$$\max(x,y,z) = \frac{\max(x,y) + z + |\max(x,y) - z|}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}$$

Exercice 7

$A = \{u = x^2+y^2 \ ; \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \ , xy = 1\}$

1. Si $x = y = 1$, $xy = 1$ donc $A \neq \emptyset$

Comme $x^2+y^2 \geq 0$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ A est minorée par 0 donc possède une borne inférieure $\alpha \geq 0$

Comme $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geq 0$ on a $x^2+y^2 \geq 2\underbrace{xy}_{=1} = 2$ pour $x, y \in A$

$\Rightarrow \inf(A) \geq 2$.

On remarque de + que pour $x = y = 1$, on a $xy = 1$ et $x^2+y^2 = 2$

et donc 2 est le plus petit élément de A, et $\inf(A) = 2$

2. Par l'absurde

Supposons que A admette une borne sup. M. alors pour tout $u = x^2+y^2 \in A$

$u \leq M$ or pour tout $x > 0$ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} \in A$ on aurait alors

pour tout $x > 0$ $\frac{x^4+1}{x^2} \leq M$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4+1}{x^2} = +\infty$ donc A ne possède pas de borne supérieure

Exercice 8

1. $A \subset B$: pour tout $x \in A$ alors $x \in B$ et donc
VRAI
Par conséquent pour tout $x \in B$, $x \leq \sup(B)$ car tous les élément de A sont dans B
Autrement dit $\sup(B)$ majore tous les éléments de B $\Rightarrow$ c'est donc un majorant de A
Mais $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A, donc $\sup(A) \leq \sup(B)$

2. $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ FAUX
$\underset{A}{[0,1]} \subset \underset{B}{[-1,2]}$ et $\inf A = 0$ $\inf B = -1$

Mais $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$ ok
Si $A \subset B$, alors : pour tout $x \in A$, $x \in B$ $\inf(B)$ minore les éléments de B
c'est donc un minorant de A car tous les élément de A sont dans B
et $\inf A$ est le plus grand des minorants de A donc $\inf B \leq \inf A$

3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ VRAI
En effet : A et B étant bornées elles admettent des bornes sup et inf.
$\boxed{\leq}$ soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$ on a donc $x \leq \sup A$ ou $x \leq \sup B$
Autrement dit $x \leq \max(\sup A ; \sup B)$, et $\sup A \cup B$ est le + petit des majorants de $A \cup B$
donc $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$
$\boxed{\geq}$ Supposons que $\sup A \geq \sup B$ ($\sup B \geq \sup B$ se fait de façon analogue)
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup A$, $\exists x \in A$ t.q. $\sup A - \varepsilon < x$
càd qu'il existe $x \in A \cup B$ t.q. $\max(\sup A, \sup B) (= \sup A) - \varepsilon < x$
et donc ~~max~~ $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

4 $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$ faux. On a égalité

ex: $A = [0,2]$ $B = [1,5]$

$\sup A = 2$ $\sup B = 5$ $A+B = \{a+b, a \in A, b \in B\} = [1,7]$

$\sup(A+B) = 7 = \sup A + \sup B$

. si $x \in A+B$ $x = a+b$, $a \in A$, $b \in B$ on a $x = a+b \leq \sup A + \sup B$.

donc $A+B$ est une partie (non vide) de $\mathbb{R}$ et majorée par conséquent $\sup(A+B)$ existe

et $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

. Supposons $\sup(A+B) < \sup A + \sup B$

on pose $\alpha = \sup A + \sup B - \sup(A+B)$ alors $\alpha > 0$ (on avait montré $\alpha \geq 0$)

Par définition de $\sup B$, il existe $b \in B$ t.q. $\sup B - \alpha < b \leq \sup B$

càd $\sup(A+B) - \sup(A) < b$

ou encore $\sup(A+B) - b < \sup A$

Si on pose $\beta = \sup A - \sup(A+B) + b$ alors $\beta > 0$ d'après ↑, et donc

il existe $a \in A$ t.q. $\sup A - \beta < a \leq \sup A$

càd $\sup(A+B) - b < a$

$\Rightarrow$ $\sup(A+B) < a+b$ $\Rightarrow$ contradiction

$\Rightarrow \sup(A+B) = \sup A + \sup B$

exercice : faire la même chose avec inf

5. $\inf(-A) = -\sup(A)$

. A bornée donc A majorée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ $\forall a \in A$ $a \leq M$

$\Rightarrow \forall a \in A$ $-a \geq -M$

et donc $-A$ est minorée et $\inf(-A)$ existe

En particulier $\forall a \in A$ $a \leq \sup(A)$ et $-a \geq -\sup(A)$ donc $-\sup(A)$ est un minorant de $-A$. ($\Rightarrow \inf(-A) \geq -\sup(A)$) (inf est + grand des minorants)

Or +, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$ t.q. $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$

donc $\forall \varepsilon > 0$ $\exists -a \in -A$ t.q. $-\sup(A) + \varepsilon > -a \geq -\sup(A)$

$\Rightarrow \inf(-A) = -\sup A$.

6. Reprendre le même raisonnement que (4) avec $B = \{x\}$ x fixé $\in \mathbb{R}$

7. Faux : si $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$ alors $AB = \{0, 2\}$

$\sup AB = 2$ et $\sup A . \sup B = 0$

Mais le résultat est vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$

soient $a \in A$ et $b \in B$

$0 \leq a \leq \sup A$ $\quad 0 \leq b \leq \sup B$

$\Rightarrow ab \leq \sup A \sup B$ $\quad \Rightarrow \sup A \sup B$ est un majorant de AB

$\Rightarrow \sup(AB) \leq \sup A \sup B$.

- On fixe maintenant $b \in B$ avec $b \neq 0$ (si $b = 0$ c'est évident)

(et on suppose $A \neq \{0\}$ $\rightarrow$ sinon évident aussi)

comme $ab \leq \sup(AB)$

$a \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$ $\quad \Rightarrow \dfrac{\sup(AB)}{b}$ est majorant de A

$\Rightarrow \sup A \leq \dfrac{\sup(AB)}{b}$

$\Rightarrow b \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup A}$ $\quad \Rightarrow \sup B \leq \dfrac{\sup(AB)}{\sup A}$

$\Rightarrow \sup A \sup B \leq \sup(AB)$

conclusion $\sup(AB) = \sup A \sup B$

Exercice 9 : défis

1.a $\bullet\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

on en deduit que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ ce qui donne la 1ère inegalité

$\bullet\ \sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

on en deduit que $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} > \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ ce qui donne la 2ème inegalité

b. Ecrivons les inegalités obtenues en a. pour

$n=1 \quad 2\sqrt{2}-2\sqrt{1} < \dfrac{1}{\sqrt{1}} < 2\sqrt{1}-2\sqrt{0} \quad (1)$

$n=2 \quad 2\sqrt{3}-2\sqrt{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-2\sqrt{1} \quad (2)$

$n=3 \quad 2\sqrt{4}-2\sqrt{3} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \quad (3)$

...

$n=9999 \quad 2\sqrt{10000}-2\sqrt{9999} < \dfrac{1}{\sqrt{9999}} < 2\sqrt{9999}-2\sqrt{9998} \quad (9999)$

$n=1000 \quad 2\sqrt{10001}-2\sqrt{10000} < \dfrac{1}{\sqrt{10000}} < 2\sqrt{1000}-2\sqrt{9995} \quad (1000)$

En additionnant les lignes (1) à (9999) on obtient

$2\sqrt{10000}-2\sqrt{1} < 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{9999}}$

c.a.d $\quad 198 < S - \dfrac{1}{\sqrt{10000}}$ ou encore $198+\dfrac{1}{100} < S \quad (*)$

en additionnant les lignes (2) à (10 000) on obtient

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{10000}} < 2\sqrt{10000}-2\sqrt{1}$

c.a.d $\quad S-1 < 198$ ou encore $S<199 \quad (**)$

$(*)$ et $(**)$ $\Rightarrow$ $\boxed{E(S)=198}$

2. On pose $D(x) = x - E(x)$

$\Rightarrow x = E(x) + D(x)$ et $0 \leq D(x) < 1$

d'où $nx = nE(x) + nD(x)$ et $0 \leq nD(x) < n$ (*)

Or par définition de la partie entière

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$$

$\Rightarrow E(nx) \leq nE(x) + nD(x) < E(nx) + 1$

$\Rightarrow E(nx) - nE(x) \leq nD(x) < E(nx) - nE(x) + 1$

$$\Downarrow$$

$$E(nx) - nE(x) \leq nD(x) \underset{(*)}{<} n$$

$\Rightarrow E(nx) - nE(x) < n$

or $E(nx) - nE(x)$ est un entier, on a donc

$$E(nx) - nE(x) \leq n - 1$$

La 2ème inégalité montre que

$nD(x) - 1 < E(nx) - nE(x)$ et comme $nD(x) \geq 0$, on a

$$-1 < E(nx) - nE(x)$$

Comme $E(nx) - nE(x)$ est un entier on a nécessairement

$$0 \leq E(nx) - nE(x)$$

D'où le résultat.

3. Avec la formule du binôme de Newton

a) $(2+\sqrt{3})^n = 2^n + n2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k + \dots + n.2(\sqrt{3})^{n-1} + (\sqrt{3})^n$

$(2-\sqrt{3})^n = 2^n - n2^{n-1}\sqrt{3} + \dots + (-1)^k C_n^k 2^{n-k}(\sqrt{3})^k + \dots + (-1)^{n-1} n.2(\sqrt{3})^{n-1} + (-1)^n\sqrt{3}$

On additionne membre à membre, les termes de puissances impairs de $\sqrt{3}$ s'annulent, seuls subsistent les termes de " pairs $k=2m$, de $\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est une somme de termes de la forme

$$2(-1)^{2m} C_n^{2m} 2^{n-2m} (\sqrt{3})^{2m} = 3^m . 2^{n-2m+1} C_n^{2m}$$

C'est à dire une somme d'entiers pairs (puisque $n-2m+1 \geq 1$)

b) On pose $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$ (on a une somme de termes >0)

On a successivement

$$1<3<4$$

$$1<\sqrt{3}<2 \Rightarrow 0<2-\sqrt{3}<1$$

$\Rightarrow 0<(2-\sqrt{3})^n<1$ càd $(2-\sqrt{3})^n - 1 < 0$

Donc $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n$ ①

Comme $(2-\sqrt{3})^n > 0$ on a aussi $(2+\sqrt{3})^n < (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ ②

① et ② $\Rightarrow$ $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1 < (2+\sqrt{3})^n <$ " + "

càd $2p-1 < (2+\sqrt{3})^n < 2p$

$\Rightarrow E((2+\sqrt{3})^n) = 2p-1$ qui est impaire.

4. $A = \left\{ \frac{m}{mn+1} , m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

A est minorée par 0 (en effet $m, n \in \mathbb{N}^*$ on a nécessairement $\frac{m}{mn+1} \geq 0$,

A est majorée par 1 (en effet: $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m, n \geq 1$

$\Rightarrow m.n \geq m$

$\Rightarrow mn+1 \geq mn \geq m$

$\Rightarrow \frac{m}{mn+1} \leq 1$)

Par conséquent A possède une borne inférieure α et une borne supérieure β telles que $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 1$

Supposons $\alpha > 0$: alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{mn+1} \geq \alpha$

en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1} \geq \alpha$ (si $m=1$) ou encore $1 \geq \alpha n + \alpha$

càd pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $n \leq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ ce qui n'est pas possible pour tout n.

Donc $\alpha = 0$

Supposons $\beta < 1$ alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{mn+1} \leq \beta$

en particulier si $n=1$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ $\frac{m}{m+1} \leq \beta$ ou encore $m \leq \beta m + \beta$

càd, comme $1-\beta > 0$ " $m \in \mathbb{N}^*$ $m \leq \frac{\beta}{1-\beta}$ ce qui est impossible

Donc $\beta = 1$