Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n°2
Les fonctions

Exercice 1 : images et antécédents

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$

1. Déterminer les images directes suivantes :

$$\text{a. } f(\{-1,2\}), \quad \text{b. } f([-3,-1]), \quad \text{c. } f([-3,1]).$$

2. Déterminer les images réciproques suivantes :

$$\text{a. } f^{-1}(\{4\}), \quad \text{b. } f^{-1}(\{-1\}), \quad \text{c. } f^{-1}([-1,4]).$$

Exercice 2 : domaine de définition

1. Calculer le domaine de définition des fonctions f définies de la façon suivante :

$$\text{a. } f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}, \quad \text{b. } f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, \quad \text{c. } f(x) = \sqrt[4]{x^2-5x}\,.$$

2. Donner le domaine de définition et l'image directe de ces domaines par les fonctions f suivantes

$$\text{a. } f(x) = \sqrt{4-3x^2}, \quad \text{b. } f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{c. } f(x) = 1+\sin(x), \quad \text{d. } f(x) = \tan(2x).$$

Exercice 3 : parité

1. Après avoir donné leur domaine de définition, dire si les fonctions f définies de la façon suivante sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.

   a. $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$, b. $f(x) = x^3 - x^7$, c. $f(x) = \cos(x^2)$, d. $f(x) = 1 + \sin(x)$.

2. Même question pour la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$.
   Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f possède un axe de symétrie qu'il faudra calculer.

4. Même question avec la fonction $g : x \mapsto \sin(x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$.
5. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{2(x-1)}$.
   Après avoir déterminé son ensemble de définition, montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f possède un centre de symétrie qu'il faudra calculer.
6. Même question avec $g : x \mapsto -x^3 + 3x + 4$.

Exercice 4 : vrai ou faux

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, le prouver. Si elles sont fausses donner un contre exemple.

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $u, v \in \mathbb{R}$. On a alors
   $$(\text{si } u < v \text{ alors } f(u) \leq f(v)) \text{ équivalent à } (\text{si } u \leq v \text{ alors } f(u) \leq f(v)).$$
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}$. On suppose que
   $$\text{pour tout } \varepsilon > 0, |f(x) - k| \leq \varepsilon,$$
   alors f est constante et $f(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. La composée de deux fonctions impaires est une fonction impaire.
4. Soient E une partie de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction impaire sur le domaine D. Alors nécessairement, D contient 0 et $f(0) = 0$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Alors nécessairement f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.
6. Soient E une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire sur le domaine E. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire sur $f(E)$.
7. Soient f et g deux bijections d'un ensemble E dans lui-même. On dit que x est un point fixe de E pour f lorsque
   $$f(x) = x.$$
   On note $h = g \circ f$. Quelles affirmations sont vraies ?
   (a) h est une bijection de E dans lui-même.
   (b) Si f possède un point fixe et g possède un point fixe, alors h possède un point fixe.
   (c) Si h possède un point fixe alors g et f possèdent un point fixe.
   (d) $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
8. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$ et U une partie de G. Quelles affirmations sont vraies ?
   (a) Si f et g sont injectives alors h est injective.
   (b) Si f et g sont surjectives alors h est surjective.
   (c) h est une application de E dans G.
   (d) $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Exercice 5 : injectif, surjectif, bijectif ?

1. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

   1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1, \end{array}$ 2. $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1, \end{array}$ 3. $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)}$.
   (a) f est-elle injective ? Surjective ?
   (b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
   (c) Montrer que la restriction $g = f\mid_{[-1,1]}$ est une bijection.

Exercice 6 : composition

1. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ pour les fonctions f et g définies de la façon suivante :
   (a) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$,
   (b) $f(x) = 1 - x^3$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$,
   (c) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$,
   (d) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $g(x) = x^2 + 2$.
2. Donner le domaine de définition ainsi que la forme de la fonction $f \circ g \circ h$ pour les fonctions f, g et h définies de la façon suivante :
   (a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 1$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x + 3$,
   (c) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sqrt{x+3}$.
3. Donner le domaine de définition des fonctions F suivantes et les mettre sous la forme $f \circ g$ où f et g sont à définir.
   (a) $F(x) = \sin(\sqrt{x})$,
   (b) $F(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.
4. Vérifier si les affirmations suivantes sont vraies ou non :
   (a) Si g est une fonction paire et $h = f \circ g$ alors, h est aussi une fonction paire.
   (b) Si g est une fonction impaire et $h = f \circ g$ alors, h est aussi une fonction impaire.

Exercice 7 : défis

1. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telle que

$$f : \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0,1] \cup \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = Id_{[0,1]}$.

2. Soit $f : I \to I$ une application, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $f = f \circ f \circ f$.
Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
3. Soit $f : I \to I$ une application, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $f = f \circ f$.
Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = Id_I$.
4. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On considère $f : I \to J$ et $g : J \to I$ deux applications telles que $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ est injective.
Montrer alors que f et g sont bijectives.
5. (a) Montrer que pour tous a et $b \in \mathbb{R}$, $4ab \leq (a+b)^2$.
   (b) Déterminer les domaines de définition des fonctions
   $$f(x) = \sqrt{x(x-1)} + 1 \quad \text{et } g(x) = 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + 3,$$
   que l'on note $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
   (c) En utilisant la question (a), donner un encadrement des éléments de $f(\mathscr{D}_f)$ et de $fg(\mathscr{D}_g)$.
   (d) Montrer que $g \circ f$ est bien définie sur $\mathscr{D}_f$. Qu'en est-il pour $f \circ g$?
6. On considère deux fonction f et g définie sur I à valeurs dans J où I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont bornées. On définit les parties positives et négatives d'une fonction définie sur I notées f^+ et f^-, les fonctions positives définies de la façon suivante :
   $$f^+ = \sup_{x \in I}(f, 0) \quad \text{et } f^- = \sup_{x \in I}(-f, 0).$$
   Montrer les résultats suivants :
   (a) $\sup\limits_{x \in I}(f, g) = f + (g - f)^+$,
   (b) $\inf\limits_{x \in I}(f, g) = g - (g - f)^+$,
   (c) $f = f^+ - f^-$,
   (d) $|f| = f^+ + f^-$.

Exercice 1

(tous les résultats sont à justifier bien entendu)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto |x|$

a. $f(\{-1,2\}) = \{f(-1), f(2)\} = \{1,2\}$

b. $f([-3,-1]) = [1,3]$

c. $f([-3,1]) = [0,3]$

2. a. $f^{-1}(\{4\}) = \{-4,4\}$

   b. $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$

   c. $f^{-1}([-1,4]) = [-4,4]$

Exercice 2

1. a. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,-1\}$

   b. $D_f = [0,+\infty[$

   c. $D_f =]-\infty,0] \cup [5,+\infty[$

2. a. $D_f = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} ; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ $\quad$ $\operatorname{Im} f = [0,2]$

   b. $D_f = \mathbb{R}^{*}$ $\quad$ $\operatorname{Im} f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

   c. $D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $\operatorname{Im} f = [0,2]$

   d. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$ $\quad$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

Exercice 3

1\. a. Ni paire, ni impaire c. paire

b. f impaire d. ni paire ni impaire

2\. $D_f =]-1,0[\cup]0,1[$: ensemble centré en 0

$$f(-x) = \frac{-x\sin(-\frac{1}{x})}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$ f est paire

3\. $D_f = \mathbb{R}$ $f(a+x) = a^2+2ax+x^2+2a+2x-3$

$f(a-x) = a^2-2ax+x^2+2a-2x-3$

$f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow a=-1$

Donc $x=-1$ est axe de symétrie

4\. $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$x = \frac{\pi}{2}$ axe de symétrie, en effet: $f(\frac{\pi}{2}-x) = f(\frac{\pi}{2}+x)$

(utiliser $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(\frac{\pi}{2}+x)$ et $\cos(\pi-x) = \cos(\pi+x)$)

5\. $D_f = \mathbb{R}-\{1\}$ s'il y a un centre, son abscisse se trouve nécessairement sur $x=1$

On fait le changement de variable $y = x-1$ càd $x = y+1$

Notre fonction $f: x \to f(x)$ s'écrit avec $g: y \to g(y) = f(y+1)$

$$g(y) = \frac{(y+1)^2-4}{2y} = \frac{y}{2}+1-\frac{3}{2y} = h(y)+1 \text{ où } h(y) = \frac{y}{2}-\frac{3}{2y}$$

h est impaire donc g = fonction impaire $+1$

Par conséquent, le centre de symétrie ~~est~~ est le point $(1,1)$. (à vérifier avec la formule du cours)

6\. Le centre de symétrie est $(0,4)$

Exercice 4

1. VRAI $\boxed{\Rightarrow}$ si $[(u < v) \Rightarrow f(u) \leq f(v)]$ est vraie

soient u, v t.q. $u \leq v$: . si $u<v$ alors $f(u) \leq f(v)$ par hypothèse

. si $u = v$ $f(u) = f(v)$ càd $f(u) \leq f(v)$

$\boxed{\Leftarrow}$ si $[(u \leq v) \Rightarrow f(u) \leq f(v)]$ est vrai

alors si $u<v$, on a a fortiori $u \leq v$ et donc $f(u) \leq f(v)$

2. VRAI On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ $|f(x) - k| \leq \varepsilon$ $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

supposons par l'absurde que $f(x_0) \neq k$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$

alors on pose $a = |f(x_0) - k| > 0$ $(**)$

si $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ et $x = x_0$ on a par $(*)$ $|f(x_0) - k| \leq \frac{a}{2}$

Autrement dit $a \leq \frac{a}{2} \Rightarrow a = 0$ or $a > 0$ par $(**)$ $\Rightarrow$ contradiction

3. VRAI Soit f impaire

si $f : I \to f(I)$, I centré en 0

alors $f(I)$ est aussi centré en 0 : car si $y \in f(I)$, il existe $x \in I$

t.q. $f(x) = y$, et $-x \in I$ (car I centré en 0) $\Rightarrow f(-x) \in I$

et $f(-x) = -f(x) = y$ et donc $-y \in f(I)$

Ainsi $f(I)$ est centré en 0

Soit $g : f(I) \to J$ impaire alors $\forall x \in I$ $g \circ f(-x) = g(f(-x))$

$$= g(-f(x))$$

$$= -g(f(x))$$

$$= -g \circ f(x)$$

et donc $g \circ f$ est impaire sur I

4. FAUX. si f est impaire alors $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 mais rien n'oblige ce domaine à contenir 0.

ex : $f : x \mapsto x\sqrt{x^2-1}$ impaire et $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Par contre, si $0 \in \mathcal{D}_f$ on a bien $f(-0) = -f(0)$ càd $f(0) = 0$

5. VRAI Soient $x, y \in \mathbb{R}$ t.q. $x \leq y$

- si $x, y \in \mathbb{R}_+$ $f(x) \leq f(y)$ (par hyp.) ($\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$)
- si $x, y \in \mathbb{R}_-$ on pose $\tilde{x} = -x$ et $\tilde{y} = -y$ $\tilde{x}$ et $\tilde{y} \in \mathbb{R}_+$

avec $\tilde{y} \leq \tilde{x}$ $\Rightarrow f(\tilde{y}) \leq f(\tilde{x})$

$\Rightarrow f(-y) \leq f(-x)$

$\Rightarrow -f(y) \leq -f(x)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ donc $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_-$

- si $x \leq 0 \leq y$ $x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0)$ ($f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_-$)

$0 \leq y \Rightarrow f(0) \leq f(y)$ ($f \nearrow$ " $\mathbb{R}_+$)

$f(x) \leq f(0) \leq f(y)$ $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ donc f est $\nearrow$

6. VRAI Soit $y \in f(E)$ alors $\exists! x \in E$ t.q. $y = f(x)$

et $x = f^{-1}(y)$

Montrons que $f(E)$ est centré en 0 :

vérifions que $-y \in f(E)$. Par hyp. E est centré en 0 $\Rightarrow -x \in E$

$\Rightarrow f(-x) \in f(E)$

$\overset{\shortparallel}{-f(x)} \in f(E)$

$\Rightarrow -y \in f(E)$. OK

Montrons que f^{-1} est impaire

$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = f^{-1} \circ f(-x) = -x = -f^{-1}(y)$ OK

7. a. VRAI

la composée de 2 bijections est une bijection

- la composée de 2 injections est une injection

soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$, f et g injectives

$g \circ f$ l'est aussi car : soient $z_1, z_2 \in E$ t.q. $g\circ f(z_1) = g \circ f(z_2)$

comme g est injective $\Rightarrow f(z_1) = f(z_2)$

" f " " $\Rightarrow z_1 = z_2$

- la composée de 2 surjections est une surjection

si $f : E \to F$, $g : F \to G$ surjectives alors $g \circ f$ aussi car :

soit $z \in G$, alors $\exists y \in F$ t.q. $g(y) = z$ (g surjective)

comme f surjective, $\exists x \in E$ t.q $y = f(x)$

donc $\exists x \in E$ t.q $g \circ f(x) = z$ $\Rightarrow g\circ f$ surjective

si f et g bijectives alors f et g sont à la fois injectives & bijectives et donc $g \circ f$ est à la fois injective et surjective donc bijective.

b. FAUX ex : $f(x) = 2x+2$ $f(-2) = -2$ $x = -2$ point fixe de f

$g(x) = \frac{1}{2}x$ $g(0) = 0$ $x = 0$ " " "g

$g\circ f(x) = \frac{1}{2}(2x+2) = x+1$ n'a pas de point fixe

c. FAUX Soient $f(x) = g(x) = -x$ définies sur $\mathbb{R}^*$

ce sont des bijections de $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ qui n'ont pas de point fixe sur $\mathbb{R}$

et $g\circ f(x) = x = Id_{\mathbb{R}^*}$ ne possède que des points fixes.

d. VRAI $f^{-1} \circ g^{-1} \circ h \circ h \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ Id_E \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$

$\Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1}$ est bijection réciproque de $g \circ f$ et $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ quand $h = g \circ f$

8. Elles sont toutes vraies

a. vu dans 7.a.

b. " " "

c. f, g applications, $g\circ f$ est défini sur le même ensemble que f qui est E et prend ses valeurs dans l'ensemble d'arrivée de g qui est G

d. $\boxed{\subset}$ soit $x \in h^{-1}(U) = (g\circ f)^{-1}(U)$

donc il existe $z \in U$ t.q. $z = g\circ f(x)$

On pose $y = f(x)$ alors $z = g(y)$ donc $y \in g^{-1}(U)$

c.à.d. $f(x) \in g^{-1}(U)$

c.à.d. $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$

$\Rightarrow x \in f^{-1} \circ g^{-1}(U)$.

Donc $h^{-1}(U) \subset f^{-1}(g^{-1}(U))$

$\boxed{\supset}$ soit $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$

alors il existe $y \in g^{-1}(U)$ t.q. $y = f(x)$

or si $y \in g^{-1}(U)$, il existe $z \in U$ t.q $z = g(y)$

$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) = g\circ f(x) \Rightarrow x \in (g\circ f)^{-1}(U)$

Et donc $f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset (g\circ f)^{-1}(U)$

Exercice 5

1.1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ — 0 n'a pas d'antécédent $\Rightarrow$ f non surjective
(s'il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q $0 = m+1$ alors $m = -1 \notin \mathbb{N}$)

soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $f(n_1) = f(n_2)$ càd $n_1 + 1 = n_2 + 1$
alors $n_1 = n_2$

donc f est injective.
Et par conséquent f non bijective.

2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n+1$
. g injective : si $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$
. si $m \in \mathbb{Z}$ alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ t.q $m = n+1$
ce n vaut $n = m-1 \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ g surjective

Donc g bijective.
(autre méthode : Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, on pose $m = n+1$ alors $n = m-1$
si on pose $\tilde{g} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m \mapsto m-1$ on a $\tilde{g} \circ g(n) = n$
et $g \circ \tilde{g}(m) = m$

donc $\tilde{g} \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$ et $g \circ \tilde{g} = Id_{\mathbb{Z}}$ donc g bijective de réciproque $g^{-1} = \tilde{g}$

3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
. non surjective : -1 par exemple n'a pas d'antécédent
. non injective : si $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$
$n_1^2 = n_2^2 \Rightarrow n_1 = n_2$ ou $n_1 = -n_2$

2. a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{2x}{(1+x^2)}$
. non injective : $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$
. non surjective $y = 2$ n'a pas d'antécédent
$(f(x) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2(1+x^2) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta < 0)$

b. $f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$ a des solutions ssi $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$
càd $y \in [-1, 1]$. D'où $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

c. Soit $y \in [-1,1]$ les solutions x, possibles de $g(x)=y$ où $g = f|_{[-1,1]}$
sont t.q. $yx^2 - 2x + y = 0$

càd $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}$

On cherche les solutions dans $x \in [-1,1]$:

or $x_1 = \dfrac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$ alors que $x_2 \notin [-1,1]$

Donc pour chaque $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x = x_1 \in [-1,1]$

si $g : [-1,1] \to [-1,1]$ nous avons en plus trouvé $g^{-1} : [-1,1] \to [-1,1]$

$$y \mapsto \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$$

Donc $g = f|_{[-1,1]}$ est une bijection

Exercice 6

a. $f(x) = 2x^2 - 2$ $\quad g(x) = 3x+2$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$f\circ g(x) = f(3x+2) = 2[3x+2]^2 - (3x+2)$

$g\circ f(x) = g(2x^2-2) = 3(2x^2-x)+2$

$f\circ f(x) = f(2x^2-x) = 2(2x^2-x) - (2x^2-x)$

$g\circ g(x) = g(3x+2) = 3(3x+2)+2$

b. $f(x) = 1-x^3$ $\quad g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R}^*$

$f\circ g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ $\quad f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^3$

$g\circ f$ " t.q. $f(x) \neq 0$ càd $x \neq 1$ donc $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$g\circ f(x) = g(1-x^3) = \dfrac{1}{1-x^3}$

$f\circ f$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad f\circ f(x) = 1-(1-x^3)^3$

$g\circ g$ " t.q. $g(x) \neq 0$ toujours vrai si $x \in \mathbb{R}^*$

$g\circ g(x) = \dfrac{1}{1/x} = x.$

c. $f(x) = \sin(x)$ $\quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g = \mathbb{R}^+$

$f \circ g$ définie sur $\mathbb{R}^+$ $\quad f\circ g(x) = \sin(1-\sqrt{x})$

$g \circ f$ " t.q. $\sin(x) \in \mathbb{R}_+$ càd $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$

$g\circ f(x) = 1 - \sqrt{\sin x}$

$f\circ f$ défini sur $\mathbb{R}$ $\quad f\circ f(x) = \sin(\sin x)$

$g \circ g$ " sur $\mathbb{R}_+$ avec $g(x) \geq 0$ càd $x \in [0,1]$

$D_{g\circ g} = [0,1]$ et $g\circ g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.

d. $f(x) = \sqrt{2x+3}$ $\quad g(x) = x^2+2$ $\quad D_f = [-\frac{3}{2}, +\infty[$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

$f\circ g$ défini sur $\mathbb{R}$ $\quad f(g(x)) = \sqrt{2(x^2+2)+3}$

$g\circ f$ — $[-\frac{3}{2}, +\infty[$ $\quad g\circ f(x) = 2x+5$

$f\circ f$ défini sur $[-3/2, +\infty[$ avec $f(x) \geq 0$ ce qui est toujours le cas

et $f\circ f(x) = \sqrt{2(\sqrt{2x+3})+3}$

$g\circ g$ défini sur $\mathbb{R}$ $\quad g\circ g(x) = (x^2+2)^2+2$

2. a. $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$ $\quad f\circ g\circ h$ défini sur $\mathbb{R}$

$f\circ g\,(x-1) = f(2(x-1)) = 2(x-1)+1$

b. $D_f = [1, +\infty[$ $\quad D_g = \mathbb{R}$ $\quad D_h = \mathbb{R}$

$f\circ g\circ h$ définie si $g(x) \geq 1$ càd $x^2+2 \geq 1$ càd $x^2 \geq -1$ toujours vrai

$f\circ g\circ h(x) = \sqrt{(x+3)^2+1}$

c. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad D_g = \mathbb{R}$ $\quad D_h = [-3, +\infty[$

$f\circ g\circ h$ définie si $g(x) \neq -1$ càd $\cos(x) \neq -1$ ou encore $x \neq (2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$

or $h(x)$ est tel que pour $x \in D_h$ $h(x) \geq 0$. Il faut donc $h(x) \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$

càd $x \neq (2k+1)^2\pi^2 - 3$, $k \in \mathbb{N}$

si $x \in [-3,+\infty[\setminus \{(2k+1)^2\pi^2-3,\ k\in\mathbb{N}\}$

$$f\circ g\circ h(x) = \frac{2}{\cos(\sqrt{x+3})+1}$$

3. a. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ $\quad x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{x} \overset{g}{\mapsto} \sin(\sqrt{x})$ $\quad f: x\mapsto \sqrt{x}$ $\quad g: x\mapsto \sin x$

b. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad x \overset{f}{\mapsto} x^2 \overset{g}{\mapsto} \frac{x^2}{x^2+4}$ $\quad f: x\mapsto x^2$ $\quad g: x\mapsto \frac{x}{x+4}$

4. a. si g paire (sous reserve que les ensembles de depart et d'arrivée soient centrés en 0)

$h(-x) = f\circ g(-x) = f(g(x)) = f\circ g(x) = h(x)$ $\Rightarrow$ h paire

b. $h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x))$ A ce stade là on ne peut rien conclure si l'on ne sait rien d'autre sur f

. si f est impaire $\quad f(-g(x)) = -f(g(x)) = -h(x) \Rightarrow h$ est impaire

. si f est paire $\quad f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x) \Rightarrow h$ est paire

Exercice 7

1. $f: [0,1] \to [0,1]$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

. si $x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f\circ f(x) = f(x) = x$

. si $x\notin[0,1]\cap\mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1-x$ " $\quad f\circ f(x) = f(1-x)$

mais $1-x \notin [0,1]\cap\mathbb{Q}$ (cf TD1) donc $f\circ f(x) = f(1-x) = 1-(1-x) = x$

Donc pour tout $x\in[0,1]$ $\quad f\circ f(x) = x$ càd $f\circ f = Id_{[0,1]}$

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est injective

comme $\forall x \in I$ $f(f\circ f(x)) = f(x)$ on a $f\circ f(x) = x$

autrement dit $f\circ f = Id_I$ donc f est bijective donc surjective

$\boxed{\Leftarrow}$ si f est surjective

$\forall y \in E$ $\exists x \in I$ t.q. $y = f(x)$ et $f\circ f(y) = f\circ f\circ f(x) = f(x)$ et $f(x) = y$

donc $f\circ f = Id_I$ donc f est bijective $\Rightarrow f\circ f(y) = y$

3. Si f est injective alors $\forall x \in I$ $f\circ f(x) = f(x) \Rightarrow f(f(x)) = f(x)$

$\Rightarrow f(x) = x$

si f est surjective, $\forall y \in I$, $\exists x \in I$ t.q. $\Rightarrow f = Id_I$

$y = f(x)$ et $f(y) = f\circ f(x) = f(x)$ et $f(x) = y \Rightarrow f(y) = y \Rightarrow f = Id_I$

4. Avant de répondre nous allons montrer que

a. $g\circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

soient $x_1, x_2 \in I$ si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (car $g\circ f$ injective)

$\Rightarrow f$ injective

b. $g\circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective $f : I \to J$ $g : J \to K$

soit $z \in K$, il existe $x \in I$ t.q $g\circ f(x) = z$

si on pose $f(x) = y$ alors pour tout $z \in K$, il existe $\underbrace{y (= f(x))}_{\in J}$ t.q. $g(y) = z$

donc g est surjective.

Ici : $\left.\begin{array}{l} g\circ(f\circ g\circ f) \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective} \\ (f\circ g\circ f)\circ g \text{ injective} \Rightarrow g \text{ injective} \end{array}\right\}$ donc g bijective

Donc g^{-1} existe.

Montrons que f est bijective.

Rappel : f, g injectives $\Rightarrow g\circ f$ injective : en effet soient $x_1, x_2 \in I$ t.q.

$$g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2)$$
$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

f et g surjective $\Rightarrow g\circ f$ surjective : en effet : $f: I \to J$ $g: J \to K$

$$g\circ f : I \to K$$

Soit $z \in K$, comme g surjective, $\exists y \in J$ t.q. $g(y) = z$

comme f " $\exists x \in I$ t.q. $y = f(x)$

donc $\exists x \in I$ t.q. $g\circ f(x) = z$

Ici $$f\circ g\circ f = \underbrace{\underbrace{g^{-1}}_{\text{surj.}} \circ \underbrace{(g\circ f\circ g\circ f)}_{\text{surj.}}}_{\text{surj.}} = \underbrace{\underbrace{(f\circ g\circ f\circ g)}_{\text{inj.}} \circ \underbrace{g^{-1}}_{\text{inj}}}_{\text{inj}} \Rightarrow f\circ g\circ f \text{ bijective}$$

Et d'après le début de la question : $f\circ g\circ f = (f\circ g)\circ f$ surjective $\Rightarrow f$ surjec[tive]

et $f\circ g\circ f = f\circ(g\circ f)$ injective $\Rightarrow f$ injective

donc f bijective.

5.a. $(a+b)^2 - 4ab = a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$
donc $(a+b)^2 \geq 4ab$

6. $D_f = \{x \in \mathbb{R} ;\ x(1-x) \geq 0\} = [0,1]$
$D_g = \{x \in \mathbb{R} ;\ (x-1)(2-x) \geq 0\} = [1,2]$

c. Si $ab \geq 0$, d'après a) $2\sqrt{ab} \leq \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$
D'autre part, comme $\sqrt{y} \geq 0$, $\forall y \geq 0$ on a :

$$1 \leq f(x) \leq |x + (1-x)| + 1 = 1+1 = 2$$
$$3 \leq g(x) \leq |(x-1) + (2-x)| + 3 = 4$$

d. $f(D_f) = f([0,1]) \subset [1,2] = D_g$
donc $g \circ f$ est bien définie sur D_f
Mais $g(D_g) \subseteq [3,4]$ et $[3,4] \cap D_f = \emptyset \Rightarrow D_{f \circ g} = \emptyset$

6.a. $f + (g-f)^+ = f + \sup\limits_{x \in E}(g-f, 0) = f + \begin{cases} g-f & \text{si } g > f \\ 0 & \text{si } g \leq f \end{cases}$

$$= \begin{cases} f+g-f & \text{si } g \geq f \\ 0 & \text{si } g < f \end{cases} = \begin{cases} g & \text{si } g > f \\ f & \text{si } g \leq f \end{cases}$$
$$= \sup(f,g)$$

b. $g - (g-f)^+ = g - \begin{cases} g-f & \text{si } g > f \\ 0 & \text{si } g < f \end{cases} = \begin{cases} f & \text{si } g \geq f \\ g & \text{si } g \leq f \end{cases} = \inf(f,g)$

c. $f = f^+ - f^-$ si $f \geq 0$ $(f^+ - f^-)(x) = f^+(x) - f^-(x)$
$= f^+(0) - 0 = f(x)$.

si $f \leq 0$ $(f^+ - f^-)(x) = 0 - (-f(x)) = f(x)$

$|f| = f^+ + f^-$: si $f(x) \geq 0$ $(f^+ + f^-)(x) = f(x) = |f(x)|$
si $f(x) \leq 0$ $(f^+ + f^-)(x) = -f(x) = |f(x)|$