Feuille 5

Exercice 1 (Divertissement) Donner explicitement un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 (Monotonie) Lesquelles des suites suivantes sont monotones ?

$$a_n = n^2 - e^n \ ; \ b_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n) \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ c_n = n^n + (-1)^n \ ; \ d_n = n^n - n! \quad .$$

Exercice 3 (Limites de suites)

1. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$n - \sqrt{(n+a)(n+b)} \ (a,b \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{3\sqrt{n} + 2\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3} + 2\sqrt{n+1}} \ ; \ \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ n^{-2+(-1)^n} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\cos(\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}) \ (a \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{E(na)}{n} \ (a \in \mathbb{R}\ , \ n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \ ; \ n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ .$$

2. Montrer que la suite $a_n = \frac{th(n)+2e^{-n}}{n^2+e^{-n}}$ est majorée par $\frac{3}{n^2}$ et en déduire sa limite l. Trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, alors $|a_n - l| \leq 10^{-2}$.

Exercice 4 (Suites adjacentes) On supposera $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites $u_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$ et $v_n = 2^n \tan(\theta/2^n)$ sont adjacentes. Déterminer leur limite commune.
2. Montrer que la suite $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ est convergente (*Vous pouvez utiliser les suites extraites formées par les termes de rang pair et ceux de rang impair*).
3. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et considère les suites $u_n(x) = (1+x/n)^n$ et $v_n(x) = (1-x/n)^{-n}$ telles que $|x| < n$. Montrer que les deux suites sont adjacentes et que leur limite commune est e^x.

Exercice 5 (Suites adjacentes : e) On supposera $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les suites $a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers la même limite.

   On admettra que cette limite est e.

2. On montrera que $e \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer que $a_q < e < b_q$. En déduire une absurdité.

Exercice 6 (Suites extraites)

1. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante telle que $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.
3. Montrer que la suite suivante est formée d'exactement deux sous-suites convergentes :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

4. Répéter la question précédente avec un nombre arbitrairement fixé de suites extraites. Pouvez-vous penser à un exemple avec une infinité de sous-suites convergentes mais de limites différentes ?

Exercice 7 (Équations trigonométriques)

1. Montrer que l'équation trigonométrique $\tan(x) = x$ a une solution et une seule dans l'intervalle $I_n =](n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et que $a_n > \pi + a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On pose $b_n = a_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Montrer que b_n est une suite croissante et convergente.
3. Calculer $\tan(a_n)$ en fonction de b_n de deux manières différentes. En déduire que $\tan(a_n) = \frac{-1}{\tan(b_n)}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 8 (Suites récurrentes : exemples élémentaires)

A On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 \in \mathbb{R}$ arbitrairement fixé, et $a_n = \frac{a_{n-1} + n}{n + 1}$.

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle est convergente. Quelle est la limite ?
2. Déterminer a_n en fonction de n.

B On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $a_n \geq \sqrt{n}$ alors $a_{n+2} \geq \sqrt{n+2}$.
2. Déduire du premier point que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \sqrt{n}$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$. Qu'est-ce que vous en concluez pour la convergence de (a_n) ?

C On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 7$ et $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$ est croissante sur et stabilise l'intervalle $[0, 7]$.
2. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

D On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = \frac{1}{2}$ et $a_n = (1 - a_{n-1})^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto (1 - x)^2$ est décroissante sur et stabilise l'intervalle $[0, 1]$.
2. Montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

E On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = \frac{\pi}{3}$ et $a_n = \frac{\pi}{2}\cos^2(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite ne converge pas.

F Etudier suivant les valeurs de a_0, la limite de la suite définie par $a_n = (a_{n-1}^2 + 1)/2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 (Suites récurrentes doubles) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, telle que pour $n \geq 1$,

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1} \quad \text{et} \quad b_n = a_n - a_{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \quad .$$

1. Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes. Déterminer la limite de (b_n).
2. Montrer par un exemple que si (a_n) n'est pas bornée, alors (b_n) peut ne pas avoir de limite.

Exercice 10 (Moyenne arithmético-géométrique)

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
2. On fixe $a, b \in \mathbb{R}_+$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$u_0 = a \ , \ v_0 = b \ ; \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ , \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad .$$

   Montrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes dont on notera $M(a, b)$ la limite.
3. Déterminer $M(a, a)$ et $M(a, 0)$.
4. Montrer que $\min(a, b) \leq \sqrt{ab} \leq M(a, b) \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b)$.
5. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Université Claude Bernard (Lyon 1) Année 2014-2015
UE MathI Analyse L1

Feuille 5

Exercice 1 (Divertissement) *Donner explicitement un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$.*

Réponse : Divertissez-vous !

Exercice 2 (Monotonie) *Lesquelles des suites suivantes sont monotones ?*

$$a_n = n^2 - e^n \quad ; \quad b_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad c_n = n^n + (-1)^n \quad ; \quad d_n = n^n - n! \quad .$$

Réponse : Pour étudier les propriétés de monotonie de la suite (a_n), on utilisera la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2 - e^x$. On la notera f. La dérivée f' se définit par la loi $x \mapsto 2x - e^x$. Sa valeur en 0 est $f'(0) = -1$. Nous vérifierons, à l'aide d'un tableau de variations faisant intervenir f'', que f' admet des valeurs négatives sur la totalité de $\mathbb{R}_+$. Ceci suffit pour conclure que f, par conséquent la suite (a_n) est décroissante.

La seconde dérivée se définit par $x \mapsto 2 - e^x$. Nous avons par conséquent le tableau suivant :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
f	-1		$\searrow$		$-\infty$
f'	-1	$\nearrow$	$2\ln(2) - 2$	$\searrow$	$-\infty$
f''		$+$	0	$-$	

On remarque d'abord que $2\ln(2) - 2 < 0$. En effet, il suffit de se rappeler que $2 < e$ et que ln est une fonction strictement croissante. On conclut alors que sur $\mathbb{R}_+$, f' est strictement négative et que par conséquent, f est strictement décroissante. C'est aussi la monotonie de (a_n).

Pour étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on ne peut avoir recours à une fonction. Alors, on compare deux termes successifs. Cette comparaison peut se faire en comparant soit $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ à 1, soit $b_{n+1} - b_n$ à 0. Tout d'abord, $b_{n+1} = (n+2)(n+3)\dots(2n+1)(2n+2) = \prod_{i=1}^{n+1}(n+1+i)$. Alors, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} = \frac{4n^2+6n+2}{n+1}$. Ce quotient est strictement supérieur à 1. On en déduit que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Pour éviter un manque trop gratuit de monotonie, on supposera que (c_n) soit définie sur $\mathbb{N}^*$. Alors $c_{n+1} - c_n = (n+1)^{n+1} - n^n + 2(-1)^{n+1} \geq n^{n+1} - n^n + 2(-1)^{n+1} = n^n(n-1) + 2(-1)^{n+1}$. Or, $n \geq 2$ implique $n^n(n-1) \geq 4 > 2$. Par conséquent, La suite est strictement croissante.

On détermine que $d_{n+1} - d_n = (n+1)((n+1)^n - n!) - (n^n - n!)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, cette différence est strictement positive.

Exercice 3 (Limites de suites)

1. *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$n - \sqrt{(n+a)(n+b)} \ (a, b \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{3\sqrt{n} + 2\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3} + 2\sqrt{n+1}} \ ; \ \frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ n^{-2+(-1)^n} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\cos(\sqrt{|a + bn + 4n^2\pi^2|}) \ (a \in \mathbb{R}) \ ; \ \frac{E(na)}{n} \ (a \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}^*) \ ; \ \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ ;$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \ ; \ n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} \ (n \in \mathbb{N}^*) \ .$$

Réponse : • Pour la première limite, on peut utiliser les expressions conjuguées. La limite est $-\frac{a+b}{2}$.

• Pour la deuxième, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+2\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n^2+3}+2\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}(3+2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+n^{-\frac{1}{6}})}{\sqrt{n}(\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^2}}+2\sqrt{1+\frac{1}{n}})}=\frac{3+2}{1+2}=\frac{5}{3}$.
• Pour la troisième on utilise le fait que

$$\frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} = \frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{\ln(n)}{n})}{\ln(2n)+\ln(2+\frac{\ln(n)}{2n})} .$$

Ceci découle des propriétés fondamentales de ln. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+\ln(n))}{\ln(2n+\ln(n))} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{\ln(n)}{n})}{\ln(2n)+\ln(2+\frac{\ln(n)}{2n})} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(2n)}\frac{1+\frac{\ln(1+\frac{\ln(n)}{n})}{\ln(n)}}{1+\frac{\ln(2+\frac{\ln(n)}{2n})}{\ln(2n)}} .$$

Dans le produit final, dont on est en train de déterminer la limite, le deuxième facteur tend vers 1 (vérifiez pourquoi). Par conséquent, il suffit de déterminer $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(2n)}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(2n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(2)+\ln(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{\ln(n)(1+\frac{\ln(2)}{\ln(n)})} = 1 .$$

• La limite de la suite $(n^{-2+(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ se détermine facilement si on constate que cette suite est l'union de deux suites extraites correspondant aux rangs pairs et impairs, $((2n)^{-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $((2n+1)^{-3})$ respectivement. Chacune tend vers 0, ainsi la suite tend vers 0.
• Pour la suivante, on profite de la périodicité de 2π de la fonction cos. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty}\cos(\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}) = \lim_{n\to+\infty}\cos(\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}-2\pi)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{|a+bn+4n^2\pi^2|-4n^2\pi^2}{\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}+2\pi}\right) = \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{a+bn+4n^2\pi^2-4n^2\pi^2}{\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}+2\pi}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{a+bn}{\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}+2\pi}\right) = \cos\left(\frac{b}{4\pi}\right) .$$

Signalons que la dernière égalité fait appel à la continuité de la fonctions cos : on calcule d'abord la limite de $\frac{a+bn}{\sqrt{|a+bn+4n^2\pi^2|}+2\pi}$, ensuite on lui applique la fonction cos. Les quelques détails manquants sont laissés aux usagers.
• Le constat (rappel ?) essentiel est que $na \le E(na) < na+1$, la propriété fondamentale de E. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a\le\frac{E(na)}{n}<a+\frac{1}{n}$. Les gendarmes nous disent que la limite est a.
• Pour tout i satisfaisant la condition $1\le i\in 2n+1$, on a $n\le\sqrt{n^2+i}\le\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$. Par conséquent $\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+1}\le\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+i}}\le\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n}$. Le term géneral de la suite est donc minoré et majoré par $\frac{2n+1}{n+1}$ et $\frac{2n+1}{n}$ respectivement. D'après les gendarmes, la limite est 2.
• On se contente de la réponse : 1.
• Dans un premier temps, on rappelle que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp(-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right))$. La fonction exponentielle étant continue, on se concentre sur $\lim_{n\to+\infty} -n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Celle-ci est égale à $\lim_{n\to+\infty} -\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$ et qui a la même limite quand $n\to+\infty$ que $-\frac{\frac{\frac{-1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}}{-\frac{2}{n^3}} = -\frac{n^3}{2}\frac{1}{n^2+n}$, d'après la règle de l'Hopital. Cette dernière expression tend vers $-\infty$. Ainsi, la limite après application de l'exponentielle est 0.
• Pour la dernière limite, on a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n+1}} &= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}-e^{\frac{1}{n+1}\ln(n)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(1-e^{\frac{1}{n+1}\ln(n)-\frac{1}{n}\ln(n)}\right) \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(1-e^{-\frac{\ln(n)}{n(n+1)}}\right) . \end{aligned}$$

$e^{-\frac{\ln(n)}{n(n+1)}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et $e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Alors la limite est $1.(1-1)=0$.

2. *Montrer que la suite* $a_n = \frac{th(n)+2e^{-n}}{n^2+e^{-n}}$ *est majorée par* $\frac{3}{n^2}$ *et en déduire sa limite* l*. Trouver* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geq n_0$ *, alors* $|a_n - l| \leq 10^{-2}$*.*

   Réponse : En utilisant la définition de th on obtient

$$a_n \quad = \quad \frac{th(n)+2e^{-n}}{n^2+e^{-n}} \quad = \quad \frac{\frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}+2e^{-n}}{n^2+e^{-n}} \quad \leq \quad \frac{1+2}{n^2} \quad .$$

   En particulier, la limite est 0. Pour conclure, il suffit de constater que $\frac{3}{n^2} \leq 10^{-2}$ si et seulement si $n^2 \geq 300$ et que par conséquent, il suffit de prendre $n \geq 20$.

Exercice 4 (Suites adjacentes) *On supposera* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Montrer que les suites* $u_n = 2^n \sin(\theta/2^n)$ *et* $v_n = 2^n \tan(\theta/2^n)$ *sont adjacentes. Déterminer leur limite commune.*

   Réponse : Pour préciser et éviter les divisions par zéro, on supposera θ fixé dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}$. On calcule d'abord

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad = \quad \frac{2^{n+1}\sin(\theta/2^{n+1})}{2^n\sin(\theta/2^n)} \quad = \quad \frac{2^{n+1}\sin(\theta/2^{n+1})}{2^n\sin(2\theta/2^{n+1})} \quad = \quad \frac{2^{n+1}\sin(\theta/2^{n+1})}{2^{n+1}\sin(\theta/2^{n+1})\cos(\theta/2^{n+1})} \quad = \quad \frac{1}{\cos(\theta/2^{n+1})} \quad .$$

   On en déduit que (u_n) est une suite croissante. En utilisant la formule générale $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, on démontre que (v_n) est décroissante (exercice d'entraînement). Finalement, on montre que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ en utilisant la règle de l'Hopital. Voyons comment. On écrit $u_n - v_n$ sous la forme $\frac{\sin(\theta/2^n)-\tan(\theta/2^n)}{2^{-n}}$. Quand $n \to +\infty$, on a une forme $0/0$ pour la limite. Ensuite, on dérive pour obtenir en appliquant l'Hopital

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) \; = \; \lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(2)\;2^{-n}\left(\cos(\theta/2^n) - \frac{1}{\cos^2(\theta/2^n)}\right)}{-\ln(2)\;2^{-n}} \; = \; \lim_{n\to+\infty}\left(\cos(\theta/2^n) - \frac{1}{\cos^2(\theta/2^n)}\right) = 0\,.$$

   Les dérivées utilisées sont $(2^x\sin(\theta/2^x))'$ et $(2^x\tan(\theta/2^x))'$.
   Méthode suggérée en td : La méthode précédente est trop compliquée. On peut procéder en faisant la factorisation $u_n - v_n = 2^n\sin(\theta/2^n)\left(1 - \frac{1}{\cos(\theta/2^n)}\right)$. Or $\lim_{n\to+\infty}\; 2^n\sin(\theta/2^n) = \lim_{n\to+\infty}\; \theta\;\frac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} = \theta$. Comme le deuxième facteur tend vers 0 quand $n \to +\infty$, on conclut la même limite pour $u_n - v_n$.

2. *Montrer que la suite* $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ *est convergente (*Vous pouvez utiliser les suites extraites formées par les termes de rang pair et ceux de rang impair*).*

   Réponse : Les suites extraites de rangs impairs et pairs repectivement forment une paire de suites adjacentes décroissantes et croissantes respectivement. Leur différence est décrite par le terme général $\frac{1}{2n+1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Les détails sont laissés comme exercice.

3. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$ *et considère les suites* $u_n(x) = (1 + x/n)^n$ *et* $v_n(x) = (1 - x/n)^{-n}$ *telles que* $|x| < n$*. Montrer que les deux suites sont adjacentes et que leur limite commune est* e^x*.*

   Réponse : Précisons dès le début la notation $u_n(x)$ et $v_n(x)$. Le nombre x est fixé et les deux suites se définissent à partir du rang satisfaisant la condition $|x| < n$. Par exemple, si x était

1, on commencerait par $n = 2$. On vérifiera d'abord que $u_n(x)$ est une suite croissante. Pour ce faire, on introduit une fonction auxiliaire

$$\begin{array}{rccc} f_n & : &]-n,n[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} \end{array} .$$

Plus explicitement, $f_n(t) = \left(1+\frac{t}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}$. Le choix $|t| < n$ montre que f_n n'admet que des valeurs strictement positives. On dérive (calculez!) et on trouve que

$$f_n'(t) = \left(1+\frac{t}{n+1}\right)^{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n-1}\ \frac{t}{n(n+1)} .$$

Encore une fois le choix $|t| < n$ détermine le signe de la fonction concernée, cette fois-ci f_n'. En fait, on a le tableau de variations suivant :

t	$-n$		0		n
f_n'		$-$	0	$+$	
f_n		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On en déduit que sur l'intervalle $]-n,n[$, f_n atteint a un minimum qui est 1, en d'autres termes pour $|t| < n$, $u_n(t) \leq u_{n+1}(t)$. Par conséquent, la suite $u_n(x)$ est croissante.
Pour conclure la décroissance de $v_n(x)$ il suffit de remarquer que $v_n(x) = u_n(-x)^{-1}$.
Finalement, on montre que $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) - v_n(x) = 0$. En effet, on a

$$u_n(x) - v_n(x) \quad = \quad u_n(x) - u_n(-x)^{-1} \quad = \quad \frac{u_n(x)u_n(-x) - 1}{u_n(-x)} \quad = \quad \frac{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n - 1}{1-\frac{x}{n}} .$$

Au numérateur, après simplification des 1, on a une somme de puissances non nulles de $\frac{x^2}{n^2}$, expression tendant vers 0 quand $n \to +\infty$. Le dénominateur tend vers 1 quand $n \to +\infty$. La conclusion s'ensuit.
Il reste à calculer la limite commune des deux suites adjacentes. Ceci se fait en constatant que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad = \quad \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \quad = \quad \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right) .$$

On peut appliquer la règle de l'Hopital à $\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ quand $n \to +\infty$ pour conclure que cette limite est x.

Exercice 5 (Suites adjacentes : e) *On supposera $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Montrer que les suites $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes, et en déduire qu'elles convergent vers la même limite.*

   Réponse : Clairement, la suite (a_n) est strictement croissante. Le calcul

$$b_{n+1} - b_n \quad = \quad \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \quad = \quad \frac{n+1-(n+1)^2}{(n+1).(n+1)!}$$

   montre que (b_n) est strictement décroissante. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0$, on conclut que les deux suites sont adjacentes. La conclusion finale est celle du théorème des suites adjacentes.

   On admettra que cette limite est e.

2. *On montrera que $e \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Montrer que $a_q < e < b_q$. En déduire une absurdité.*

   Réponse : L'encadrement $a_q < e < b_q$ est conséquence immédiate du premier point de l'exercice : (a_n) est strictement croissante tandis que (b_n) est strictement décroissante. De cet encadrement découle le suivant : $q.q!a_q < q!.p < a_q.q! + 1$. Cette conclusion est absurde puisque chacun de ces trois nombres sont naturels et qu'entre deux naturels successifs il ne peut pas y en avoir un troisième.

Exercice 6 (Suites extraites)

1. *On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante telle que $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

   Réponse : Notons l la limite de la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$. On montrera que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la convergence de la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ la force à être bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq u_{kn} \leq l$. Or, une suite croissante et bornée est convergente. De plus, la limite ne saurait être autre que l (pourquoi ?).

2. *Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.*

   Réponse : On commence par rappeler l'identité fondamentale de somme : $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. On en déduit que $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$. On applique cette dernière identité avec $a = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $b = 1$: $\cos(n + 1) + \cos(n - 1) = 2\cos(n)\cos(1)$. Si la suite $(\cos(n))$ converge vers l, alors quand $n \to +\infty$, $2l = 2l\cos(1)$. Or $\cos(1) \neq 1$.
   On peut maintenant déduire la divergence de $(\sin(n))$ en utilisant $\sin^2(n) + \cos^2(n) = 1$.

3. *Montrer que la suite suivante est formée d'exactement deux sous-suites convergentes :*

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   Réponse : La suite extraite formée par les termes de rang pair converge vers 0 tandis que celle formée par les termes de rang pair converge vers 1. Notons qu'il y a beaucoup d'autres sous-suites convergentes mais que leurs limites sont dans $\{0, 1\}$ et qu'après un nombre fini de termes, elles deviennent soit la sous-suite de termes de rang pair, soit celle des termes de rang impair.

4. *Répéter la question précédente avec un nombre arbitrairement fixé de suites extraites. Pouvez-vous penser à un exemple avec une infinité de sous-suites convergentes mais de limites différentes ?*

   Réponse : On se contente de donner un exemple avec une infinité de limites de sous-suites (*valeurs d'adhérences dans le langage savant*). On admettra qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. On les énumère comme une suite : $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... Maintenant on construit la suite, disons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si n est de la forme p_i^k avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors on définit $a_n = p_i + \frac{1}{p_i^k}$, sinon on pose $a_n = 0$. La suite ainsi construite a pour valeurs d'adhérence tous les nombres premiers et 0.

Exercice 7 (Équations trigonométriques)

1. *Montrer que l'équation trigonométrique* $\tan(x) = x$ *a une solution* a_n *et une seule dans l'intervalle* $I_n =](n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ *et que* $a_n > \pi + a_{n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

   Réponse : C'est une application du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, la fonction $\tan(x) - x$ est de dérivée $\frac{1}{\cos^2(x)} - 1$ sur l'intervalle I_n et cette dérivée est strictement positive. Par ailleurs, $\lim_{x \to \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) - x = +\infty$ tandis que $\lim_{x \to \left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) - x = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure qu'il existe une valeur $a_n \in I_n$ auquel $\tan(x) - x$ s'annule. L'unicité de cette valeur découle de la croissance stricte de $\tan(x) - x$.

   Vérifions la deuxième conclusion. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\tan(a_n + \pi) = \tan(a_n) = a_n$. La première égalité est justifiée par les propriétés de la fonction tangente, la deuxième est par définition de a_n. La même définition pour a_{n+1} donne $a_{n+1} = \tan(a_{n+1})$. Or, à la fois a_{n+1} et $a_n + \pi$ sont sur l'intervalle I_{n+1}, où la fonction $\tan(x) - x$ est croissante. Comme $\tan(a_{n+1}) = a_{n+1} > a_n = \tan(a_n + \pi)$, on conclut que $a_{n+1} > a_n + \pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *On pose* $b_n = a_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. *Montrer que* b_n *est une suite croissante et convergente.*

   Réponse : On calcule que $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - \pi$. Cette différence est strictement positive d'après le premier point de l'exercice. Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in](n-1)\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, $b_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et croissante, donc convergente.

3. *Calculer* $\tan(a_n)$ *en fonction de* b_n *de deux manières différentes. En déduire que* $\tan(a_n) = \frac{-1}{\tan(b_n)}$ *et* $\lim_{n \to +\infty} b_n$.

   Réponse : La définition même de b_n montre que $\tan(a_n) = \tan(b_n + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(b_n)}$. Or $\tan(a_n)$ est aussi a_n. Par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \tan(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{a_n} = 0$. Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonctin tangente est continue, et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \tan(b_n) = \tan(\lim_{n \to +\infty} b_n) = \tan(0)$. On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Exercice 8 (Suites récurrentes : exemples élémentaires)

A *On définit la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *par* $a_0 \in \mathbb{R}$ *arbitrairement fixé, et* $a_n = \frac{a_{n-1} + n}{n + 1}$.

1. *Montrer que la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est monotone et qu'elle est convergente. Quelle est la limite ?*

   Réponse : On calcule pour $n \in \mathbb{N}^*$ que

   $$a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1} + n}{n+1} - a_{n-1} = \frac{n(1 - a_{n-1})}{n+1} .$$

   On utilise cette donnée pour montrer que le signe de cette différence est en fait déterminé par le signe de $1 - a_0$. Supposons d'abord que $a_0 > 1$, en d'autres termes $1 - a_0 < 0$. Par récurrence, supposons que $1 - a_{n-1} < 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et calculons la différence $a_{n+1} - a_n$:

   $$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)(1 - a_n)}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\left(1 - \frac{a_{n-1} + n}{n+1}\right) = \frac{1 - a_{n-1}}{n+2} .$$

   L'hypothèse de récurrence montre que $a_{n+1} - a_n < 0$. Un raisonnement symétrique montre que, mutatis mutandis, si $1 - a_0 > 0$ alors (a_n) est croissante. Finalement, si $1 - a_0 = 0$ alors par récurrence, la suite est constante. Dans tous les cas, nous avons une suite monotone.

2. *Déterminer* a_n *en fonction de* n.

   Réponse : On constate que le terme général peut aussi s'écrire $a_n = \frac{a_{n-1} - 1}{n+1} + 1$, soit encore $a_n - 1 = \frac{a_{n-1} - 1}{n+1}$. Alors, on montre par récurrence que $a_n - 1 = \frac{a_0 - 1}{(n+1)!}$.

B *On définit la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $a_1 = 1$ *et* $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$.

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *, si* $a_n \geq \sqrt{n}$ *alors* $a_{n+2} \geq \sqrt{n+2}$ *.*

   Réponse : Si $a_n \geq \sqrt{n}$, alors $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n} \leq 1 + \sqrt{n}$. Ensuite, $a_{n+2} = 1 + \frac{n+1}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{n+1}{1+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}+n+2}{\sqrt{n}+1}$. On compare cette dernière expression à $\sqrt{n+2}$ en élévant au carré. En effet, on obtient que

   $$(\sqrt{n}+n+2)^2 \;=\; 5n + n^2 + 4 + 2n\sqrt{n} + 4\sqrt{n}\ ,$$

   et

   $$(\sqrt{n+2}(\sqrt{n}+1))^2 \;=\; (n+2)(n+2\sqrt{n}+1) \;==\; n^2 + 3n + 2n\sqrt{n} + 4\sqrt{n} + 2\ .$$

   On détermine vite que la différence entre les deux expressions est $2n + 2$.

2. *Déduire du premier point que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *,* $a_n \geq \sqrt{n}$ *.*

   Réponse : On calcule directement que $a_2 = 2$. On a donc $a_1 \geq \sqrt{1}$ et $a_2 \geq \sqrt{2}$. La conclusion découle alors d'une récurrence sur les termes de rangs pair et impair séparément.

3. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$*. Qu'est-ce que vous en concluez pour la convergence de* (a_n) *?*

   Réponse : Le point précédent montre que la limite en question est supérieure ou égale à 1. Or, la définition du terme suivant dans la suite montre que $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n} \leq 1 + \sqrt{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$. Les gendarmes montrent que la limite est 1, en d'autres termes $a_n \sim_{+\infty} \sqrt{n}$.

C *On définit la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $a_0 = 7$ *et* $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$ *est croissante sur et stabilise l'intervalle* $[0, 7]$*.*

   Réponse : On vérifie la conclusion de croissance en dérivant la fonction, petit exercice laissé à titre de révision. Notons que la croissance est en fait stricte. Par la “stabilisation”, on entend vérifier que l'image directe de l'intervalle $[0, 7]$ est contenue dans lui-même. Comme f est croissante sur l'intervalle $[0, 7]$, pour pour tout $x \in [0, 7]$, $f(x) \in [f(0), f(7)]$. Or $f(0) = \sqrt{2} > 0$ et $f(7) = 3 < 7$. Par conséquent $f([0, 7]) \subset [0, 7]$.

2. *Montrer que* (a_n) *converge et déterminer sa limite.*

   Réponse : Le premier terme de la suite est 7. Le point précédent montre alors que tous les éléments de la suite (a_n) appartiennent à l'intervalle $[0, 7]$. Il s'agit donc d'une suite bornée. On vérifie ensuite que c'est une suite décroissante. En effet, $a_1 = f(a_0) = 3 < 7 = a_0$, et comme f est croissante, $a_{n+1} = f(a_n) < a_n$ implique que $a_{n+2} = f(a_{n+1}) = f(f(a_n)) < f(a_n) = a_{n+1}$. Alors, par récurrence (a_n) est décroissante. La convergence découle de cette conclusion parce qu'une suite décroissante et bornée est convergente.

   Maintenant déterminons la limite de notre suite. Notons-la l. On utilisera l'identité de récurrence $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Comme cette identité est déterminée par la fonction f qui est dérivable, en particulier continue sur $[0, 7]$, on a $l = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + \lim_{n\to+\infty} a_n} = \sqrt{2 + l}$. L'équation $l = \sqrt{2 + l}$ a pour solutions $\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ (faites les calculs). On en garde la solution positive puisque la limite appartient à l'intervalle $[0, 7]$ (pourquoi ?). C'est la valeur recherchée.

D *On définit la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* $a_0 = \frac{1}{2}$ *et* $a_n = (1 - a_{n-1})^2$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Montrer que la fonction $f : x \mapsto (1-x)^2$ est décroissante sur et stabilise l'intervalle* $[0, 1]$.

   Réponse : On fait un raisonnement similaire au premier point de l'exercice C. Ce point est donc un exercice d'entraînement.

2. *Montrer que les sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Déterminer leurs limites.*

   Réponse : La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Alors si $x, y \in [0, 1]$ et $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$ et ces deux valeurs étant dans $[0, 1]$, une nouvelle application de f donnent $f(f(x)) \leq f(f(y))$. Cette conclusion nous permet d'appliquer la méthode de l'exercice C à toute suite ($b_k = a_{n_k}$) extraite de (a_n) avec la propriété $b_{k+1} = a_{n_k+2}$. Informellement parlant, on commence à partir d'un certain rang de (a_n), on oublie le terme suivant, ensuite on prend l'après-suivant, ensuite on oublie le terme suivant celui-ci, etc. En particulier les suites extraites formées par les termes de rang pair et ceux de rang impair suivent cette description.
   Comme $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{9}{16}$ et $a_3 = \frac{49}{256}$, la suite (a_{2n}) est croissante et la suite (a_{2n+1}) est décroissante. Les raisonnements de la première partie du point 2 de l'exercice C s'appliquent à (a_{2n}) et (a_{2n+1}) et on conclut que ces deux suites extraites sont convergentes. On détermine leurs limites suivant les techniques de la dite question de l'exercice C, cette fois-ci en utilisant la fonction $f \circ f\ (x) = (1-(1-x)^2)^2$. Le raisonnement est plus compliqué parce qu'il y aura davantage de choix. Mais rien que de savoir que ces deux sous-suites sont convergentes, éventuellement vers des limites différentes, s'avérera une information décisive.
   Appelons les limites de (a_{2n}) et (a_{2n+1}) l_1 et l_2 respectivement. Elles satisfont l'identité $x = (1-(1-x)^2)^2$. Le membre de droite de cette égalité est égal à $x^2(x-2)^2$ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Alors, on a $0 = x^2(x-2)^2 - x = x(x(x-2)^2 - 1) = x(x(x^2-4x+4)-1) = x(x^3-4x^2+4x-1)$. Or $x = 1$ est une racine évidente du deuxième facteur. On calcule alors que $x(x^3-4x^2+4x-1) = x(x-1)(x^2-3x+1) = x(x-1)(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2})$. Dans un premier temps, on garde des quatres racines celles qui sont sur $[0, 1]$. Elles sont $0, 1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
   Il reste à déterminer les valeurs exactes de l_1 et l_2. Comme $a_0 = \frac{1}{2}$ et que (a_{2n}) est croissante, $l = 1$. En effet, il est évident que $0 < \frac{1}{2}$. Quant à $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, il suffit de voir que $2 < \sqrt{5} < 3$. Comme (a_{2n}) a une limite sur $[0, 1]$ quand-même, la seule possibilité est que $l_1 = 1$.
   Pour ce qui est de la sous-suite des termes de rang impair, on a calculé que $a_1 = \frac{1}{4}$ et on a montré que (a_{2n+1}) est décroissante. Parmi les trois valeurs possibles, 1 n'est clairement pas une possibilité tandis que $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ s'écrit aussi $\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}$. Le numérateur de cette nouvelle écriture est strictement supérieure à 1. Pour voir ceci, vous pouvez l'élever au carré ce qui donne $4(9 - 6\sqrt{5} + 25)$ dont les deux facteurs sont strictement supérieurs à 1. On conclut de ce petit détour calculatoire que $\frac{1}{4} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, forcément $l_2 = 0$.

3. *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?*

   Réponse : Le point précédent nous montre l'existence de deux suites extraites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les limites sont 1 et 0. Comme toute suite extraite d'une suite convergente converge à la limite de la suite ambiante, on conclut que (a_n) n'est pas convergente.

E *On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = \frac{\pi}{3}$ et $a_n = \frac{\pi}{2}\cos^2(a_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite ne converge pas.*

Réponse : Maintenant que nous avons détaillé la méthode, nous irons plus vite sauf pour détails techniques. La suite (a_n) est déterminée par la fonction $f : x \mapsto \cos^2(x)$ qui est décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ qui sera l'intervalle d'étude. En effet, $\frac{\pi}{2}\cos^2(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{2}) = 0$. Par décroissance de f, on conclut que l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ est stabilisé par la fonction f.

Ensuite on compare a_0 à a_2 et a_1 à a_3. On détermine en appliquant f que $a_1 = \frac{\pi}{8}$ et $a_2 = \frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{8})$. Comme $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{6}$ et que cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(\frac{\pi}{8}) > \cos(\frac{\pi}{6})$. Par conséquent, $\cos^2(\frac{\pi}{8}) > \cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}$. Ainsi, $a_2 = \frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{8}) > \frac{3\pi}{8} > \frac{\pi}{3} = a_0$, et (a_{2n}) est une suite croissante.
Après la sous-suite des éléments de rang pair, on étudie ceux de rang impair. On a déjà calculé que $a_1 = \frac{\pi}{8}$ et que par conséquent $a_2 = \frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{8})$. Alors en appliquant la définition de la suite, on calcule que $a_3 = \frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{8}))$. Or, $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$ et par conséquent $\cos^2(\frac{\pi}{8}) > \cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit alors que $a_3 < \frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos^2(\frac{\pi}{4})) < \frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$ Cette suite est donc décroissante.
Or $a_0 > a_1$. Par conséquent, les deux sous-suites ont des limites différentes. On conclut que (a_n) est divergente.

F *Etudier suivant les valeurs de a_0, la limite de la suite définie par $a_n = (a_{n-1}^2 + 1)/2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Réponse : La fonction qui détermine la suite (a_n) est $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$. Sa dérivée est la fonction identique. Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On remarque aussi que sauf a_0, tout terme de (a_n) est strictement positif, puisque tout terme successeur est au moins $\frac{1}{2}$.
Supposons dans un premier temps que $a_0 \geq 0$. Dans les exercices précédents, nous avons parlé de stabiliser des intervalles bornés et fermés, donc de la forme $[A, B]$. Ceci consistait à vérifier que $A \leq f(A) \leq f(B) \leq B$. Cette vérification était essentielle et consiste à comparer $f(x)$ et x. Dans le cas actuel, on compare $\frac{x^2+1}{2}$ et x. Or, ceci équivaut à déterminer le signe de $x^2 + 1 - 2x$, soit encore $(x-1)^2$. Ce signe est toujours positif et le seul cas où l'on a l'égalité $f(x) = x$ est celui de $x = 1$. Comme sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f est croissante, on conclut que seuls les intervalles de la forme $[A, 1]$ avec $0 \leq A \leq 1$ sont stables sous l'action de f. Si a_0 est donc choisi entre 0 et 1, la suite (a_n) est convergente avec limite l satisfaisant l'égalité $l = \frac{l^2+1}{2}$, équivalemment $l = 1$. Sinon, la suite tend vers $+\infty$.
L'étude des valeurs positives pour a_0 et le constat que tout terme successeur de la suite est positif montrent que dans le cas où $a_0 < 0$, il suffit de déterminer les valeurs de a_0 qui impliquent que $a_1 \leq [0, 1]$. Toute autre valeur donnera une suite divergente. La détermination qui vient d'être indiquée consiste à trouver l'image inverse dans $\mathbb{R}_+^*$ de $[0, 1]$ par rapport à la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$. C'est l'interalle $[-1, 0]$ pour des raisons bien évidentes (vérifiez si elles ne vous le sont pas).
La conclusion finale : la suite (a_n) converge vers 1 si $a_0 \in [0, 1]$ et tend vers $+\infty$ sinon.

Exercice 9 (Suites récurrentes doubles) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, telle que pour $n \geq 1$,*

$$2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1} \quad \textit{et} \quad b_n = a_n - a_{n-1} \textit{ pour } n \in \mathbb{N}^* \quad .$$

1. *Montrer que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes. Déterminer la limite de (b_n).*

Réponse : On montre d'abord la convergence de (b_n). On constate que pour $n > 1$, $b_n - b_{n-1} = a_n + a_{n-2} - 2a_{n-1}$. L'hypothèse sur la suite (a_n) montre que $b_n - b_{n-1} \geq 0$. La suite (b_n) est donc croissante. Elle est aussi bornée. En effet, que (a_n) soit bornée veut dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$. De cela, on déduit assez vite (faites le petit calcul qui y mène !) que $|b_n| \leq 2M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Une suite monotone et bornée converge.
Pour la convergence de (a_n), on procédera par vérifier que c'est en fait une suite éventuellement monotone, c'est à dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite extraite $(a_n)_{n\geq N}$ est monotone. On remarque d'abord que $b_n \geq 0$ si et seulement si $a_n \geq a_{n-1}$ et que de par sa croissance s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_N \geq 0$, alors pour tout $n \geq N$, $b_n \geq 0$. Cette conclusion équivaudrait à dire que à partir du rang N, a_n est croissante. Or, soit (a_n) est décroissante, soit il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $a_N \geq a_{N-1} \geq 0$, dans lequel cas, on vient de voir que pour $(a_n)_{n\geq N}$ est croissante. Dans chacun des deux cas, comme la suite (a_n) est bornée, elle est aussi convergente.
Calculons finalement la limite de (b_n). Il n'y a pas grand-chose à dire puisque nous venons de découvrir que (a_n) est convergente. Par le critère de Cauchy les différences $a_n - a_m$ tendent vers 0. En particulier, celles de la forme $a_n - a_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite (b_n).

2. *Montrer par un exemple que si (a_n) n'est pas bornée, alors (b_n) peut ne pas avoir de limite.*

   Réponse : On peut définir $a_n = \sum_{i=0}^{n} i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $b_i = i$. Les suites ne sont ni bornées ni convergentes. Les vérifications des autres hypothèses sur (a_n) sont laissées en exercice.

Exercice 10 (Moyenne arithmético-géométrique)

1. *Montrer que si $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $2\sqrt{ab} \leq a + b$.*

   Réponse : Exercice.

2. *On fixe $a, b \in \mathbb{R}_+$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme suit :*

$$u_0 = a \ , \ v_0 = b \ \ ; \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ , \ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad .$$

   Montrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes dont on notera $M(a,b)$ la limite.

   Réponse : Le premier point montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$. On étudiera la monotonie à partir de $n = 1$. Par définition, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n u_n} = |u_n| = u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante. De l'autre côté, $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{v_n+v_n}{2} = v_n$. On conclut que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   Pour la condition de limite des suites adjacentes, on remarque d'abord que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées. En effet, elles sont toutes les deux positives et inférieures à v_1. Ceci est vrai en raison du point 1 et du fait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit décroissante. Étant monotones elles sont convergentes. Notons l et l' les limites respectives de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   On procède à la vérification de la condition de limite. On calcule que $v_n^2 - u_n^2 = \frac{(u_{n-1}+v_{n-1})^2}{4} - u_{n-1}v_{n-1} = \frac{(u_{n-1}-v_{n-1})^2}{2}$. On en déduit que $v_n + u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$. Quand on passe à la limite, on obtient l'ídentité $l + l' = \frac{l-l'}{2}$. Il n'y a qu'une seule possibilité puisque les deux limites sont positives : $l = l' = 0$. Par conséquent, la limite de $v_n - u_n$ est 0 quand $n \to 0$.

3. *Déterminer $M(a,a)$ et $M(a,0)$.*

   Réponse : Les valeurs sont a et 0. Justifiez vous-même.

4. *Montrer que* $\min(a,b) \leq \sqrt{ab} \leq M(a,b) \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a,b)$.

   Réponse : Exercice.

5. *Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.*

   Réponse : Exercice.