Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse 1- Automne 2014

Série d'exercices n°6
Équations différentielles

Exercice 1 : calcul de primitives

1. Déterminez les primitives suivantes sur des intervalles appropriés :

$$1)\ \int x^{-3/4}dx,\quad 2)\ \int(\sin(x)+3\cos(x))dx,\quad 3)\ \int(x^3+6x+1)dx,\quad 4)\ \int\sqrt[3]{x}dx,$$
$$5)\ \int\cos(3x)dx,\quad 6)\ \int\frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx,\quad 7)\ \int\frac{(\ln(x))^2}{x}dx,\quad 8)\ \int\mathrm{sh}(x)dx.$$

2. (a) Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, soient a et b deux réels, montrer la formule d'intégration par parties :
$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$
   (b) Application : calculer les primitives de $\ln$ sur un intervalle approprié.

Exercice 2 : équations différentielles

1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :
$$1)\ x'=5x,\quad 2)\ x'+3t^2x=t^2,\quad 3)\ t^2x'+tx=1,\quad 4)\ tx'-x=t^2\sin(t).$$
2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles appropriés :
$$5)\ tx'-x=2t^2,\quad x(1)=5,\qquad 6)\ tx'+x=e^t,\quad x(1)=2,$$
$$7)\ (t+1)x'+x=\ln(t),\quad x(1)=10,\qquad 8)\ x'+\tan(t)x=\cos^2(t), x(0)=-1.$$
3. (a) Chercher la solution continue satisfaisant :
$$x'+x=f(t),$$
   où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$
   vérifiant $x(0)=0$.
   (b) Cette solution est-elle dérivable en 1 ? Conclure.

Exercice 3 : équation de Bernoulli

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(B) \quad x' + P(t)x + Q(t)x^r = 0,$$

où $r \in \mathbb{R}$, P et Q sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation dans le cas où $r = 1$.
2. Résoudre cette équation dans le cas où $r = 0$.
3. On suppose maintenant $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
   (a) L'équation différentielle (B) est-elle alors linéaire ? Si non, pourquoi ?
   (b) On suppose que l'intervalle I est défini de telle sorte que les solutions x sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose $u = x^{1-r}$.
   Montrer que u satisfait alors l'équation différentielle suivante :
   $$(BU) \quad u' + (1-r)P(t)u + (1-r)Q(t) = 0.$$
   (c) L'équation (BU) est-elle linéaire ?
   (d) Résoudre (BU).
   (e) En déduire les solutions de (B).
4. Application : résoudre l'équation
   $$tx' + x = t^2x^2.$$

Exercice 1

1. $I_1 = \int x^{-3/4} dx$ définie sur $]0,+\infty[$

$I_1 = \left[\frac{x^{-3/4+1}}{-3/4+1} \right] + C = \frac{x^{1/4}}{1/4} + C = 4x^{1/4} + C, \ C \in \mathbb{R}, \ x \in]0,+\infty[$

2. $I_2 = \int (\sin x + 3\cos x) dx$ définie sur $\mathbb{R}$

$I_2 = -\cos x + 3\sin x + C$

3. $I_3 = \int (x^3 + 6x + 1) dx$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad I_3 = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + x + C$

4. $I_4 = \int \sqrt[3]{x}\, dx$ " " " $\quad I_4 = \frac{3}{4} x^{4/3} + C$

5. $I_5 = \int \cos(3x) dx$ " " "

on pose $u = 3x$ $\quad du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$I_5 = \int \frac{1}{3} \cos(u) du = \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \sin(3x) + C$

6. $I_6 = \int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}} dx$ définie sur $\mathbb{R}$

on pose $u = 1 + x + 2x^2$ $\quad du = (1+4x)dx$

$\Rightarrow I_6 = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{1+x+2x^2} + C$

7. $I_7 = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ définie sur $]0,+\infty[$

on pose $u = \ln x$ $\quad du = \frac{1}{x} dx$

d'où $I_7 = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$

8. $I_8 = \int sh(x) dx$ définie sur $\mathbb{R}$ $\quad I_8 = ch(x) + C$

2\. a. D'après la formule de la dérivée d'un produit :

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad u'(x)\,v(x) = (u(x)\,v(x))' - u(x)\,v'(x)$$

u, v, u' et v' étant continues, les primitives donnent

$$\int u'(x)\,v(x)\,dx = \int (u(x)\,v(x))'\,dx - \int u(x)\,v'(x)\,dx$$

$$= u(x)\,v(x) - \int u(x)\,v'(x)\,dx$$

(à une constante près)

b. sur $]0, +\infty[$ $\quad \int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx$

on pose $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$

$v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

et $\int \ln x\,dx = [x \ln x] - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x = x[\ln x - 1]$

__Exercice 2__

1\. $x' = 5x \quad \Rightarrow \quad x(t) = Ke^{5t}, \; t \in \mathbb{R}$

2\. $x' + 3t^2 x = t^2$

solutions de $x' + 3t^2 x = 0 \quad : x(t) = Ke^{-\frac{3t^3}{3}} = Ke^{-t^3}$

Variation de la constante

on pose $x = K(t)\,e^{-t^3}$ $\quad \underbrace{x' + 3t^2 x}_{= t^2} = K'(t)\,e^{-t^3}$

$\Rightarrow K'(t) = t^2 e^{t^3}$

$\Rightarrow K(t) = \int t^2 e^{t^3}\,dt = \frac{1}{3} e^{t^3} + C$ (on pose $u = t^3$ $du = 3t^2 dt$
$\Rightarrow \frac{du}{3} = t^2 dt$)

D'où $x(t) = \left(\frac{1}{3} e^{t^3} + C\right) e^{-t^3} = \frac{1}{3} + Ce^{-t^3}$

3. (E) $t^2x' + tx = 1$ sur $I_- =]-\infty, 0[$ ou $I_+ =]0, +\infty[$

(E) $\Leftrightarrow$ $x' + \frac{1}{t}x = \frac{1}{t^2}$. Prenons I_+ (I_- est analogue)

alors $x(t) = \frac{c}{t} + \frac{\ln t}{t}$

4. $tx' - x = t^2 \sin(t)$ défini sur I_- ou I_+

sur I_+ :

$x(t) = t\,[c - \cos(t)]$

2. 5) $\begin{cases} tx' - x = 2t^2 \\ x(1) = 5 \end{cases}$ sur I_+ $x(t) = t\,[5 + 2(t-1)]$

6) $\begin{cases} tx' + x = e^t \\ x(1) = 2 \end{cases}$ sur I_+ $x(t) = \frac{2}{t} + e^t\left(1 - \frac{1}{t}\right)$

7) $\begin{cases} (t+1)x' + x = \ln(t) \\ x(1) = 10 \end{cases}$ $t \in]0, +\infty[$

$x(t) = \frac{20 + [t\,[\ln t - 1] + 1]}{1 + t}$

8) $\begin{cases} x' + \tan(t)\,x = \cos^2(t) \\ x(0) = -1 \end{cases}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$x(t) = \frac{-1 + \sin(t) - \frac{1}{3}\sin^3(t)}{\cos(t)}$

3. a. sur $[0,1]$ $x(t) = 1 - e^{-t}$

sur $]1, +\infty[$ $x(t) = \alpha e^{-t}$

x est continue en 1 si et seulement si $\alpha = e - 1$

b. Si $\alpha = e - 1$ $\lim_{h \to 0^-} \frac{x(1+h) - x(1)}{h} \neq \lim_{h \to 0^+} \frac{x(1+h) - x(1)}{h}$

Donc x n'est pas dérivable en 1.

Elle l'est sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ mais pas en 1.

Exercice 3

1. Si $r=1$ $\quad x' + P(t)x + Q(t)x = 0$

$\iff x' + (P(t)+Q(t))x = 0$

EDO linéaire homogène d'ordre 1

solutions : $x = Ke^{-\int (P(t)+Q(t))\,dt}$

2. Si $r=0$ $\quad x' + P(t)x = -Q(t)$

EDO linéaire non homogène d'ordre 1

$$x = e^{-\int P(t)\,dt}\left[C - \int Q(t)\, e^{\int P(t)\,dt}\, dt\right]$$

3. Si $r \neq 1$ ou 0

a. (B) est non linéaire à cause du terme x^r

b. $u = x^{1-r}$

$u' = (1-r)x^{1-r-1}x' = (1-r)x^{-r}x' \implies x^{-r}x' = \dfrac{u'}{1-r}$

(B) $x' + P(t)x + Q(t)x^r = 0$ s'écrit alors

$x^{-r}x' + P(t)x^{1-r} + Q(t) = 0$

$\dfrac{u'}{1-r} + P(t)u + Q(t) = 0$ soit $u' + (1-r)P(t)u + (1-r)Q(t) = 0$

c. (BU) est linéaire

$$u(t) = e^{(r-1)\int P(t)\,dt}\left[C + (r-1)\int Q(t)\, e^{(1-r)\int P(t)\,dt}\, dt\right]$$

et $x = u^{1/1-r}$

4. $tx' + x = t^2 x^2 \quad t \in]0, +\infty[$

$r = 2 \quad P(t) = \frac{1}{t} \quad Q(t) = -\frac{1}{t}$

$x' + \frac{1}{t} x = t x^2 \qquad \Leftrightarrow u' - \frac{1}{t} u + \frac{1}{t} = 0$ avec $u = x^{-1}$

$u = -t^2 + ct$

$x = \frac{1}{u} = \frac{1}{-t^2 + ct}$, $c \in \mathbb{R}$