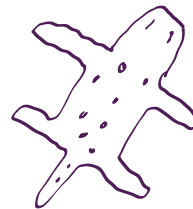
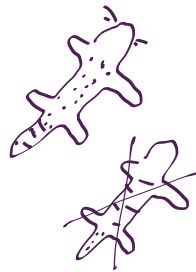


23 juin 2023.

Equations de réaction-diffusion appliquées à la biologie

* JAMES MURRAY (2 volumes)
vol. 2.
Mathematical Biology



I Introduction

Dans un contexte biologique, les systèmes de réaction-diffusion ont été introduits essentiellement par Alan Turing en 1952 pour étudier la morphogénèse (apparition des formes dans l'embryon), au cours de laquelle des formes semblent apparaître à partir de "rien".

Turing a montré que ce type d'émergence de formes peut avoir lieu dans des systèmes de réaction-diffusion très simples comme des mélanges d'espèces chimiques soumis à de la réaction et de la diffusion.

Ces formes dites structures de Turing ont été utilisées depuis les années 70 dans de très nombreux travaux de biomathématiques : des vagues sur le flanc, au léoparard, aux coquillages, à la cimetière de Fourmies, ...)

Avant de commencer l'étude d'un système nous allons analyser une seule équation de réaction-diffusion. Et commencer par l'étude d'une équation de diffusion.

II Equation de diffusion

L'equation type decrivant les phenomenes diffusifs est:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d \cdot \Delta u(t,x) \quad \text{equation de la chaleur due a FOURIER}$$

u : quantite qui se diffuse (chaleur, population, molecule...)

t : temps ($t \geq 0$)

x : espace $x \in D \subset \mathbb{R}^N$ ($N=1$ ici, en general c'est 2 ou 3)

$\frac{\partial}{\partial t}$: derivee par rapport au temps

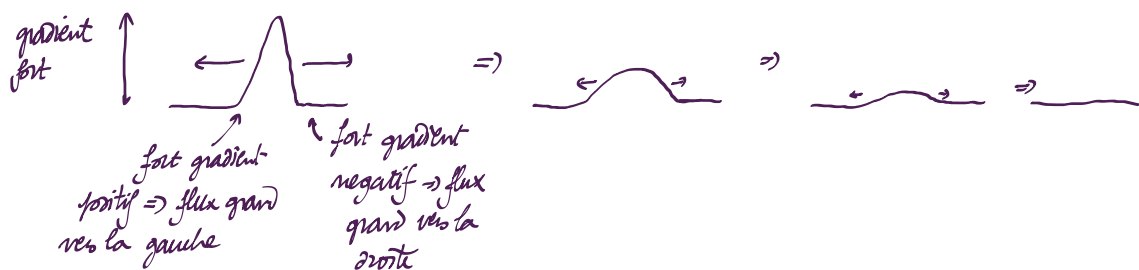
Δ : operateur de diffusion LAPLACIEN

$$\text{en 1D: } \Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

$$\text{en 2D ; } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x)$$

$d > 0$ coefficient de diffusion

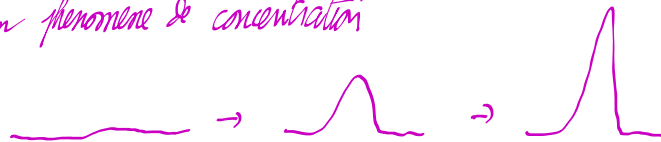
Définition : La diffusion est un phénomène pour lequel le flux est proportionnel au gradient



La diffusion aplatit donc les bosses d'autant plus vite que d est grand !

Question : que se passerait-il si $d < 0$?

on aura un phénomène de concentration



a. Les conditions aux limites

Pour que le système soit complet il est nécessaire de préciser les conditions aux limites, à savoir ① condition initiale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \cdot \Delta u$$

, à savoir ① condition initiale

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in D$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \Delta u$$

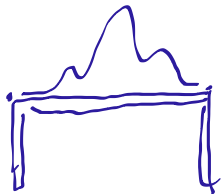
② conditions aux bords : il faut en définir 2 car on en a 2 pour la dérivée en x ($\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$)

On va considérer les 2 conditions aux bords les plus classiques:

(i) Conditions de Dirichlet homogènes:

On considère $D = [0, L]$

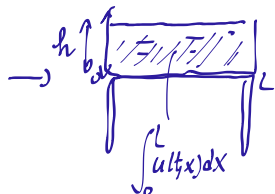
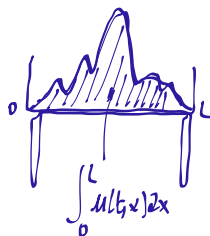
$$x \in [0, L] \quad u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad t > 0$$



$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = 0$$

(ii) Conditions de Neumann homogènes :

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t, L) = 0, \quad t \geq 0$$



on conserve la quantité
totale en tout temps

$$\int_0^L u(t, x) dx = c^{\frac{1}{2}} \text{ (indép. du temps)}$$

$$\int_0^L u(t, x) dx = L \cdot h \Rightarrow h = \frac{\int_0^L u(t, x) dx}{L}$$

Ga y est ! le système est complet !

On l'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = d \cdot \Delta u(t, x) & t \geq 0, x \in [0, L] \\ u(0, x) = f(x) & \text{(condition initiale)} \quad x \in [0, L] \\ + \text{conditions aux bords (Dirichlet ou Neumann)} & t \geq 0 \end{cases}$$

Question : peut-on résoudre ce type d'équation ?

Réponse : oui, sous certaines conditions et grâce à un outil mathématique appelé FONCTIONS PROPRES

b. Fonctions propres :

Définition : une fonction propre de l'opérateur laplacien Δ (avec les conditions aux bords données) est un profil spatial (une forme) $w: x \mapsto w(x)$ (fonction qui ne dépend que de x) tel que :

- ①. w est dérivable deux fois sur $[0,1]$
- ②. $w \neq 0$ (w n'est pas la fonction nulle sur $[0,1]$)
(w peut s'annuler en certains points mais pas partout)
- ③. w vérifie les conditions aux bords (Dirichlet ou Neumann)

venez les conditions aux bords (conditions de Neumann)

$$④. \quad \Delta w(x) = \lambda w(x) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

↑ Δ ne fait que dilater ou aplatis la forme $w(x)$
Remarque: λ est appelé valeur propre associée à Δ

Exemple: On considère $x \in [0, L]^L$ et les conditions de Dirichlet homogènes.
 Quelles sont les fonctions propres et valeurs propres associées à ces conditions?

Réponse: on cherche les fonctions w (non nulle, deux fois dérivables) tels que

$$\Delta w(x) = \lambda w(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad w''(x) = \lambda w(x)$$

$$+ \quad w(0) = w(L) = 0 \quad (\text{Dirichlet})$$

On cherche les solutions de la forme $w(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

$$\text{donc } w''(x) = \lambda w(x) \quad (\Leftrightarrow) \quad r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx} \quad \text{pour tout } x \in [0, L]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = \lambda} \quad \text{polynôme caractéristique}$$

Cas 1: $\boxed{\lambda > 0}$

on a alors 2 solutions possibles $r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $\boxed{r_2 = -\sqrt{\lambda} = -r_1}$

Dans ces cas là, les solutions de $w'' = \lambda w$ sont données par

$$w(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1 \text{ et } c_2 \in \mathbb{R}$$

$$w(x) = c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

On détermine c_1 et c_2 grâce aux conditions aux bords: $w(0) = w(L) = 0$

$$\text{si } x=0 \quad w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^{\gamma_1 \cdot 0} + c_2 e^{\gamma_2 \cdot 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \quad \Leftrightarrow c_1 = -c_2$$

$$\text{Donc } w(x) = c_1 e^{\gamma_1 x} - c_1 e^{\gamma_2 x} \quad \gamma_1 = -\gamma_2 \quad c_1 (e^{\gamma_1 x} - e^{-\gamma_1 x})$$

$$\text{et finalement } w(L) = 0 \Leftrightarrow c_1 (e^{\gamma_1 L} - e^{-\gamma_1 L}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \rightarrow \text{pas possible car sinon } w \equiv 0 \\ \text{ou} \\ e^{\gamma_1 L} - e^{-\gamma_1 L} = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$e^{\gamma_1 L} = e^{-\gamma_1 L}$$

$$\Leftrightarrow e^{\gamma_1 L} = \frac{1}{e^{\gamma_1 L}}$$

$$\Leftrightarrow (e^{\gamma_1 L})^2 = 1 \Leftrightarrow e^{\gamma_1 L} = 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 L = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_1 = 0$$

pas possible car $\gamma_1 = \sqrt{\lambda}$
 $\lambda > 0$ donc $\gamma_1 \neq 0$

si $\lambda > 0$ on a aucune fonction propre!

CAS 2 : $\boxed{\lambda = 0}$ on a $w''(x) = \lambda w(x)$ qui devient $w''(x) = 0$

$$\Rightarrow w'(x) = c_1$$

$$\Rightarrow w(x) = c_1 x + c_2$$

$$\text{Calculons } c_1 \text{ et } c_2: \quad w(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\text{donc } w(x) = c_1 x \quad \text{et } w(L) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot L = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ impossible car sinon } w(x) = c_1 x \neq 0$$

si $\lambda = 0$ on a aucune fonction propre là encore!

CAS 3 : $\boxed{\lambda < 0}$ on a $r^2 = \lambda = -|\lambda| = i^2 \cdot |\lambda|$

$$\text{on a donc } r_1 = i\sqrt{|\lambda|} \quad \text{et } r_2 = -i\sqrt{|\lambda|} = \bar{r}_1$$

$$\text{si } r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{alors } w(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$$e^{r_1} = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta) \dots \quad \text{ici } \alpha = 0 \text{ car } r_1 = i\sqrt{|\lambda|} \text{ et } \beta = \sqrt{|\lambda|}$$

$$\text{donc } w(x) = c_1 \cos(x\sqrt{|\lambda|}) + c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$$

$$\text{si } w(0) = 0 \text{ on a: } w(0) = c_1 \overset{1}{\cos(0)} + c_2 \overset{0}{\sin(0)} = 0$$

$$c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

dans ce cas $w(x) = c_2 \sin(x\sqrt{|\lambda|})$

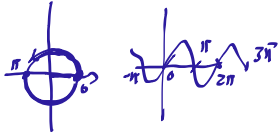
si $w(L) = 0$ on a $w(L) = c_2 \sin(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$

$c_2 = 0$ pas possible mais $w \equiv 0$

$\hookrightarrow \sin(L\sqrt{|\lambda|}) = 0$

$\Leftrightarrow L\sqrt{|\lambda|} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\xrightarrow{L>0} \xrightarrow{\sqrt{|\lambda|}>0} \xrightarrow{\text{donc}} k \in \mathbb{N}^*$



on a $L\sqrt{|\lambda|} = k\pi, k \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}}$ et donc $|\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

$\xrightarrow{\lambda < 0} \xrightarrow{|\lambda| = -\lambda} \xrightarrow{\text{donc}} -\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \text{ donc } \lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

et $\boxed{w(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$ (car $\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$)

Remarque : une fonction propre est définie à une constante multiplicative près pourquoi?? parce que si on a $w''(x) = \lambda w(x)$

alors $k w''(x) = \lambda k w(x)$

$\Leftrightarrow (k w(x))'' = \lambda (k w(x))$

Donc ici on peut prendre $c_2 = 1$ sans perte de généralité:

Conclusion : les fonctions propres associées à Δ avec Dirichlet homogène sont

données par

$w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \quad (L > 0, k \in \mathbb{N}^*)$

et

$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$

$x \in [0, L]$

2 mars 2023 2/3.

fonctions propres

• Fonctions propres associées à Δ sur $[0, L]$ ($L > 0$) avec Dirichlet homogène

on a vu que c'étaient les fonctions de la forme $w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ $k \in \mathbb{N}^*$

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$$

$$k=1 \quad \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$x=L \Rightarrow \sin(\pi) = 0$$

$$x=L/2 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi L}{2L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$k=2 \quad \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

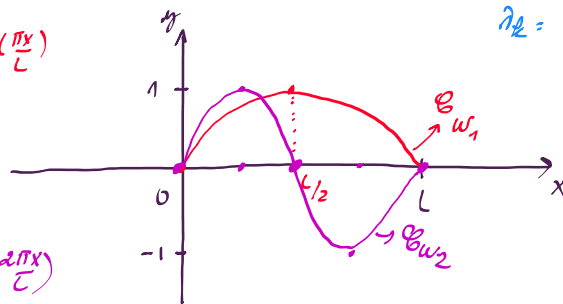
$$x=0: \sin(0) = 0$$

$$x=L: \sin\left(\frac{2\pi L}{L}\right) = \sin(2\pi)$$

$$x=L/2 \quad \sin\left(\frac{2\pi L}{2L}\right) = \sin(\pi)$$

$$x=L/4 \quad \sin\left(\frac{2\pi L}{4L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x=3L/4 \quad \sin\left(\frac{2\pi L \cdot 3}{4L}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$



Remarque: On voit que en 0 et L les graphes atteignent 0 $\Rightarrow$ ce qui correspond bien à Dirichlet

(2) k est appelé la fréquence des oscillations de graphes (si $k \uparrow$, le nombre d'oscillations augmente)



k faible



k grand

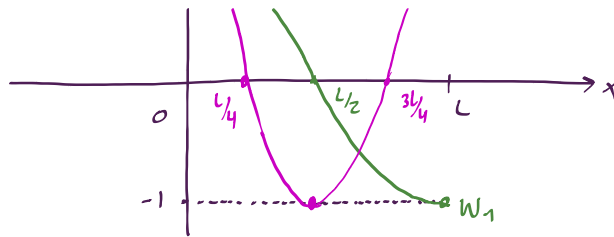
• Fonctions propres associées à Δ sur $[0, L]$ ($L > 0$) avec Neumann homogène

On rappelle que $w_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$, $L > 0$, $k \in \mathbb{N}$ (pas $\mathbb{N}^*$)



$$k=0 \quad w_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$k=1 \quad w_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



$$w_1(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$x = \frac{L}{2} \quad \cos\left(\frac{\pi \frac{L}{2}}{L}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$k=2 \quad w_2(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$x=0 \quad \cos(0) = 1$$

$$x=L \quad \cos(2\pi)$$

$$x = \frac{L}{2} \quad \cos\left(\frac{2\pi \frac{L}{2}}{L}\right) = \cos(\pi)$$

$$x = \frac{L}{4} \quad \cos\left(\frac{2\pi \frac{L}{4}}{L}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

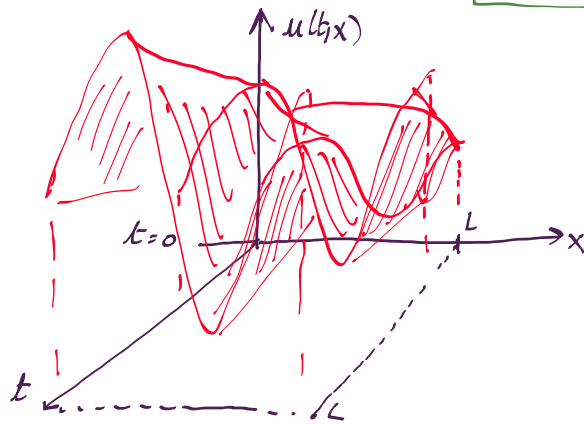
$$x = \frac{3L}{4} \quad \cos\left(\frac{2\pi \frac{3}{4}}{L}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

c. Résolution de l'équation de diffusion

① si la condition initiale est une fonction propre u_k pour Δ avec les conditions aux bords du système:

Dans cette section on suppose que

$$u(0, x) = u_k(x) \quad x \in [0, L]$$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \cdot \Delta u \quad // \text{appel: } \Delta u_k = \lambda_k u_k$$

si la condition initiale est une fonction propre, on recherche les solutions $u(t, x)$ sous la forme

$$u(t, x) = \alpha(t) u_k(x) \quad (\text{MÉTHODE DE SÉPARATION DES VARIABLES})$$

Remplaçons alors $u(t,x) = \alpha(t) w_k(x)$ dans l'équation $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d \Delta u(t,x)$

On obtient: $\frac{\partial}{\partial t} (\alpha(t) w_k(x)) = d \Delta (\alpha(t) w_k(x))$

ce qui équivaut à $w_k(x) \alpha'(t) = d \alpha(t) \Delta w_k(x)$

$w_k(x) \alpha'(t) = d \alpha(t) \lambda_k w_k(x)$ (car w_k est fonction propre)

pour tout $t \geq 0$, pour tout $x \in [0,L]$

$$\Leftrightarrow w_k(x) (\alpha'(t) - d \lambda_k \alpha(t)) = 0$$

⊗ $w_k(x) = 0$ pour tout $x \in [0,L]$ PAS POSSIBLE par la définition de w_k ($w_k(x) \neq 0$ pour tout x)

ou $\alpha'(t) = d \lambda_k \alpha(t)$ pour tout $t \geq 0$

seule possibilité $\Downarrow$ $\alpha'(t) = d \lambda_k \alpha(t)$ (edo)

ici

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha(0) e^{d \lambda_k t}}$$

Rappel: $x' = ax$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) e^{at}$$

Conclusion : comme on a posé $u(t,x) = \alpha(t) w_k(x)$

alors $u(t,x) = \alpha(0) e^{d \lambda_k t} w_k(x)$

que vaut $\alpha(0)$? on a dit $t=0$ $u(0,x) = \alpha(0) \underbrace{e^{d \lambda_k \cdot 0}}_{e^0=1} w_k(x) = \boxed{\alpha(0) w_k(x)}$

par identification avec la condition $u(0,x) = w_k(x)$, on doit avoir $\alpha(0) = 1$
 $\uparrow$ voir au tout début de la section

(ii) si la condition initiale s'écrit $u(0, x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$

où α_{k_1} et α_{k_2} sont 2 réels, et w_{k_1} et w_{k_2} sont 2 fonctions propres

bonne nouvelle: il existe un principe que l'on appelle principe de SUPERPOSITION
qui permet de résoudre facilement l'équation de diffusion avec ce type
de condition initiale

Comment? ① on résout l'équation avec la condition seule $\alpha_{k_1} w_{k_1}(x)$

② " " " " $\alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$

③ le résultat est la somme de ces 2 solutions

ici: ① on a: $u_{k_1}(t, x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x)$

② " $u_{k_2}(t, x) = \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$

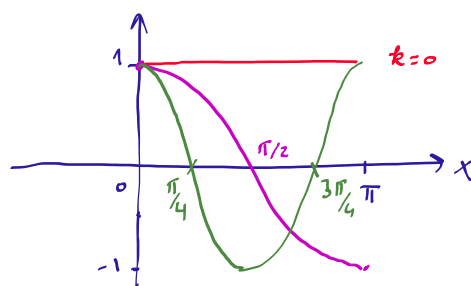
③ $u(t, x) = \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$

Exercice : On considère l'équation de la chaleur
 $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = d \Delta u(t, x)$ avec $t \geq 0$, $x \in [0, \pi]$ (ici $L = \pi$)
 avec les conditions de Neumann homogènes
 et la condition initiale $u(0, x) = 3 + 5 \cos x + 7 \cos(6x)$

1. Déterminer les fonctions propres et valeurs propres associées pour cette géométrie (càd pour $D = [0, \pi]$)
2. Dessiner les 3 premières fonctions propres
3. Résoudre l'équation de la chaleur avec $d = 1$
4. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x)$.

1. Les fonctions propres de Δ sur $[0, \pi]$ avec Neumann homogène s'écrivent $w_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \stackrel{L=\pi}{=} \cos\left(\frac{k\pi x}{\pi}\right) = \boxed{\cos(kx)}$, $k \in \mathbb{N}$
 et $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \stackrel{L=\pi}{=} -\left(\frac{k\pi}{\pi}\right)^2 = -(k)^2 = \boxed{-k^2}$, $k \in \mathbb{N}$

2.



$$k=0 \quad w_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$k=1 \quad w_1(x) = \cos(x)$$

$$k=2 \quad w_2(x) = \cos(2x)$$

3. On a comme condition initiale : $u(0, x) = 3 + 5\cos x + 7\cos(6x)$
 que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de 3 fonctions propres :

que l'on peut écrire sous la forme d'une somme de 3 fonctions propres:

$$u(0, x) = 3 \cdot 1 + 5 \cos(1 \cdot x) + 7 \cos(6 \cdot x) \\ = 3 \cos(0 \cdot x) + 5 \cos(1 \cdot x) + 7 \cos(6 \cdot x) \\ \uparrow_{k=0} \quad \uparrow_{k=1} \quad \uparrow_{k=6}$$

la solution est alors donnée par:

$$u(t, x) = 3 e^{a_1 \lambda_0 t} \cos(0 \cdot x) + 5 e^{a_1 \lambda_1 t} \cos(1 \cdot x) + 7 e^{a_1 \lambda_6 t} \cos(6 \cdot x)$$

or $\lambda_k = -k^2$ donc $\lambda_0 = 0$ $\lambda_1 = -1^2 = -1$ et $\lambda_6 = -6^2 = -36$

donc

$$u(t, x) = 3 e^0 + 5 e^{-t} \cos(x) + 7 e^{-36t} \cos(6x) \\ = 3 + 5 e^{-t} \cos(x) + 7 e^{-36t} \cos(6x)$$

4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x) = ?$

$$= 3 + 0 + 0 = \boxed{3}$$

Remarques : ① on a vu que pour Dirichlet ou Neumann, il existe

une infinité dénombrable (qu'on peut compter) de fonctions propres

que l'on note $(u_0), u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ $k \in \mathbb{N}^*$: Dirichlet

avec la même forme de valeurs propres associées:

$k \in \mathbb{N}$: Neumann

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \text{ toujours } \leq 0 !!$$

C'est une règle générale: pour toutes les dimensions (pas que la 1D)

les valeurs propres sont toujours ≤ 0

et on les écrit en commençant par la plus grande: $\dots \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 \leq 0$

② On rappelle que k est la fréquence des fonctions propres.

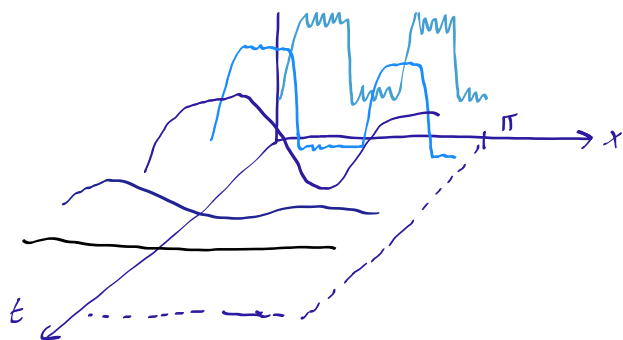
et dans l'exercice précédent on a trouvé:

$$u(t, x) = 3 + 5 e^{-t} \cos(x) + 7 e^{-36t} \cos(6x)$$

on remarque que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-36t}$ tend vers 0 plus vite que la $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}$

ce qui signifie que les fréquences les plus grandes (ici $k=6$) sont "lassées" (font tendre vers 0) plus vite que les "les plus petits

$$\uparrow u(t, x)$$



Remarque: on peut étendre le principe de superposition si la combinaison linéaire de N fonctions propres on aura alors:

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^N \alpha_k e^{i \lambda_k t} \varphi_k(x)$$

(iii) si la condition initiale est une fonction f "quelconque" (pe nécessairement une combinaison de fonctions propres).

Peut-on alors quand même trouver une formule?

Cette idée est à la base de la théorie des séries de Fourier

Definition: Toute fonction f définie sur $[0, L]$ (qui sera notre condition initiale)

qui vérifie: ① f est L -périodique

② f est de carré intégrable sur $[0, L]$: c'est que $\int_0^L f(x)^2 dx < +\infty$
se décompose comme une somme infinie (en mathématiques on appelle

se décompose comme une somme infinie (en mathématiques on appelle ça une série) de cosinus et de sinus

$$\text{Autrement dit } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

les coefficients a_k et b_k sont appelés coefficients de Fourier de f et se calculent en fonction de f .

Donc si $u(0, x) = f(x)$, $x \in [0, L]$ avec f de carré intégrable sur $[0, L]$

$$\text{alors } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

et la solution de l'équation de diffusion $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = d \Delta u(t, x)$ ayant cette condition initiale, s'écrit :

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k e^{-d \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k e^{-d \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

Mauvaise nouvelle : on a vu que les solutions de l'équation de diffusion, soient deviennent nuls, soient tendent vers une fonction constante ($u(t,x) \rightarrow 3$ dans l'exercice précédent)
 $t \rightarrow +\infty$

Par conséquent il est impossible de voir apparaître des émergences de formes et des structures différentes sur plat avec ce type d'équation.

Alan Turing a alors montré, qu'il fallait au moins 2 équations de réaction-diffusion pour ça.

III Équation de réaction-diffusion

Un système de 2 équations de réaction-diffusion est de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \underbrace{f(u,v)}_{\text{partie réaction}} + \underbrace{d_u \Delta u}_{\text{partie diffusion}} \\ \frac{\partial}{\partial t} v = \underbrace{g(u,v)}_{\text{partie réaction}} + \underbrace{d_v \Delta v}_{\text{partie diffusion}} \end{cases}$$

on a 2 espèces : u et v qui se diffusent à une vitesse d_u pour u et d_v pour v

quand elles se rencontrent elles interagissent entre elles avec des fonctions $f(u,v)$ et $g(u,v)$ qui vont influencer respectivement sur le futur de ces populations

Remarque: ces équations sont adaptées pour décrire entre autre, des réactions chimiques ou des dynamiques de population

exemple:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 2u - uv + d_u \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -v + \frac{1}{2} uv + d_v \Delta v \end{cases}$$

équation de proie - prédateur avec u : proie
 v : prédateurs
et u et v se diffusent dans leur environnement

Pour étudier ce type d'équation, on ne cherche pas à le résoudre explicitement (on ne veut pas trouver la solution exacte) mais plutôt comprendre le comportement des solutions par l'étude de la stabilité de l'équilibre.

Commençons par le plus simple:

a. Une seule équation de réaction-diffusion

Considérons l'équation suivante $\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + d \Delta u$

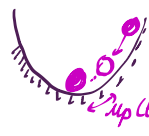
Définition: un équilibre de la réaction est une constante u_0 qui annule f

en effet: si u_0 est constante: $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = 0$ $\Delta u_0 = 0$

et donc $\frac{\partial}{\partial t} u_0 = f(u_0) + d \Delta u_0$ s'écrit: $0 = f(u_0) + 0$ i.e. $\boxed{f(u_0) = 0}$

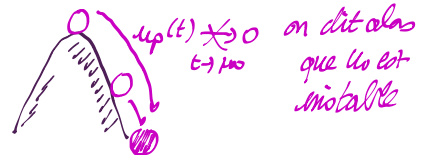
Les équilibres de l'équation de réaction-diffusion sont donc les racines de f

Étudions leur stabilité:



si $u_p(t) \rightarrow 0$
 $t \rightarrow +\infty$

u_0 est
asymptotiquement
stable



Ici on a $u(t, x)$ et on pose:

$$u(t, x) = u_0 + u_p(t, x) \quad \text{et on va étudier } \lim_{t \rightarrow +\infty} u_p(t, x)$$

équilibre perturbation

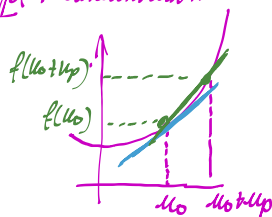
Puis on remplace $u(t, x)$ par $u_0 + u_p(t, x)$ dans l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t} u = f(u) + d \Delta u \quad \text{soit alors}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (u_0 + u_p) &= f(u_0 + u_p) + d \Delta (u_0 + u_p) \\ \downarrow & \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} u_p &= f(u_0 + u_p) + d \Delta u_p \end{aligned} \quad \Delta (u_0 + u_p) = \overset{0}{\Delta u_0} + \Delta u_p = \Delta u_p$$

$(\frac{\partial}{\partial t} u_0 = 0)$

Pour étudier le problème on linéarise $f(u_0+u_p)$ autour de u_0
 Rappel : linéarisation



si u_p est "suffisamment proche" de u_0
 alors la secante (droite qui passe par $(u_0, f(u_0))$, $(u_0+u_p, f(u_0+u_p))$)
 aura (la même pente que la tangente à $\mathcal{E}_f$ en $(u_0, f(u_0))$)
 $= f'(u_0)$
 pente de la
 secante: $\frac{f(u_0+u_p) - f(u_0)}{u_0+u_p - u_0} = \frac{f(u_0+u_p) - f(u_0)}{u_p}$

on va avoir: $\frac{f(u_0+u_p) - f(u_0)}{u_p} \simeq f'(u_0)$ or $f(u_0) = 0$

autrement dit on a: $\frac{f(u_0+u_p)}{u_p} \simeq f'(u_0)$ soit encore $f(u_0+u_p) \simeq f'(u_0)u_p$

Donc la forme linéaire de $\frac{\partial}{\partial t} u_p = f(u_0+u_p) + d\Delta u_p$ autour u_0 est donnée par

$$(*) \quad \frac{\partial}{\partial t} u_p = \underbrace{f'(u_0)}_{\text{connu}} \cdot u_p + d\Delta u_p : \text{on a une équation linéaire en } u_p.$$

Bonne nouvelle: la méthode de séparation de variables marche ici aussi!!

Autrement dit: on cherche les solutions $u(t,x)$ sous la forme $u(t,x) = \alpha(t) u_p(x)$
 où u_p est une fonction propre de Δ

si u_k est une fonction propre de Δ
on remplace alors $u_p(t, x)$ par $\alpha(t) u_k(x)$ dans (*) on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t) u_k(x)) = f'(u_0) \cdot \alpha(t) u_k(x) + d \Delta \alpha(t) u_k(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_k(x) \cdot \alpha'(t) &= f'(u_0) \alpha(t) u_k(x) + d \alpha(t) \Delta u_k(x) \\ &= f'(u_0) \alpha(t) u_k(x) + d \alpha(t) \cdot \lambda_k u_k(x) \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$
et pour tout $x \in [0, L]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha'(t) &= f'(u_0) \alpha(t) + d \alpha(t) \cdot \lambda_k \\ \alpha'(t) &= (f'(u_0) + d \lambda_k) \alpha(t) \end{aligned}$$

so
↑
so

la solution est donnée par $\alpha(t) = \alpha(0) e^{(f'(u_0) + d \lambda_k)t}$

Conclusion : la perturbation $u_p(t, x) = \alpha(0) e^{(f'(u_0) + d \lambda_k)t} \cdot u_k(x)$

et donc ① si $\boxed{f'(u_0) + d \lambda_k} < 0$: $u_p(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et u_0 est L.A.S.
(localement asymptotiquement stable)

② si $f'(u_0) + d \lambda_k > 0$ $u_p(t, x) \not\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ et u_0 est INSTABLE

③ si " " $= 0 \rightarrow$ on développe à l'ordre 2 (pas au programme)

Exercice : Étudier la stabilité des équilibres de l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \underbrace{u(1-u)}_{\text{logistique}} + \Delta u$$

équation de FISHER

sur $x \in [0,1]$ + NEUMANN

$$\lambda_k = -k^2, k \in \mathbb{N}$$

a. On pose $f(u) = u(1-u)$

les équilibres sont donnés par $f(u) = 0$ c'est-à-dire $u(1-u) = 0 \Leftrightarrow \boxed{u=0}$ ou $\boxed{u=1}$

on a 2 équilibres

b. stabilité des équilibres : (i) avec $\boxed{u_0=0}$ il faut calculer le signe de

$$f'(u_0) + d\lambda_k \text{ où } d=2, \lambda_k = -k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{or } f(u) = u(1-u) = u - u^2$$

on $f(u) = u(1-u) = u - u^2$

$f'(u) = 1 - 2u$ donc $f'(0) = 1$ donc $f'(0) + 2 \cdot (-k^2) = 1 - 2k^2$, lea

si $k=0$ $1 - 2k^2 = 1 > 0$

si $k \neq 0$ $1 - 2k^2 < 0$

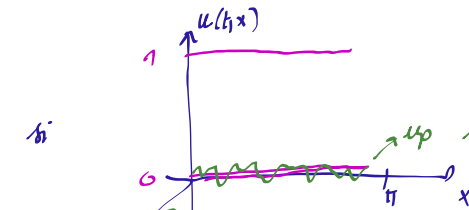
$k > 1$

$\Leftrightarrow k^2 > 1$

$\Leftrightarrow 2k^2 > 2$

$\Leftrightarrow -2k^2 \leq -2$

$\Leftrightarrow 1 - 2k^2 \leq 1 - 2 = -1 < 0$



si $u_p(0,x) = f(x)$ combinaison linéaire de $u_k(x)$

si $f(x)$ ne contient pas la fréquence

$k=0$

alors $e^{\sum_{k=0} (1-2k^2)t} \rightarrow 0$

la perturbation s'annule



$u_p(0,x) = f(x)$ contient u_0 ($k=0$)

$e^{(1-2k^2)t} \rightarrow 0$ sauf si $k=0$ $e^{(1-0)t} \rightarrow$

$u_0(x) = u_0(0) = 1$

$u_p(t,x) = e^t \cdot u_0(0) = e^t \cdot 1$ donc la perturbation s'accroît

