**Université Claude Bernard, Lyon 1**
**43, boulevard du 11 novembre 1918**
**69622 Villeurbanne cedex, France**

Licence Sciences & Technologies
Fondamentaux des mathématiques I
Séquence 3+4, Eco - Automne 2016

**Contrôle continu partiel écrit (2 heures)**
**19 octobre 2016**

**BIEN INDIQUER SON NUMERO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE.**
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

## Cours - (5 points - 30 minutes)

1. (3 points) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Factoriser $(a-b)^n$ en $(a-b)$ et un autre facteur que l'on précisera.
   (b) Application : factoriser, en justifiant les réponses, les sommes suivantes,
   $$\mathrm{A} = a^n - 1, \quad \mathrm{B} = a^n + 1$$
2. (2 points) Soit $f : I \to J$ une application, avec $I$ et $J$ deux ensembles de $\mathbb{R}$.
   (a) Énoncer la définition d'une application.
   (b) Énoncer la définition d'une image directe par $f$ d'un ensemble $A$ inclus dans $I$.
   (c) Énoncer la définition d'une image réciproque par $f$ d'un ensemble $B$ inclus dans $J$.

## Exercice 1- (6 points - 40 minutes)

1. (4 points) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \le k,l \le n} |k-l| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k)\right)$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{l=1}^{k-1}(k-l) + \sum_{l=k}^{n}(l-k) = k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}$.
   (d) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
   Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{1 \le k,l \le n} |k-l| = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

2. (a) (2 points) Montrer que pour tous $n$ et $k \in \mathbb{N}$, $(n+1)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (k+1)\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$.

   En déduire que $\dfrac{1}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer, en détaillant les calculs que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

## Exercice 2- (5 points - 30 minutes)

1. (1 point) Mettre $\mathrm{D} = \dfrac{1}{(1+2i)(3-i)}$ sous forme algébrique.
2. (2 points) Simplifier le nombre complexe $\mathrm{E} = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{-i}\right)^{20}$.
3. (2 points)
   (a) Calculer $(1+2i)^2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$.

## Exercice 3- (4 points - 20 minutes)

1. (2 points) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n \leq (n+1)^n$.
2. (2 points) Grâce à la question précédente, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'énoncé $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

## Bonus- (2 points)

Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CC partiel écrit ECO 19 oct. 2016 CORRIGÉ

## Cours

(3) 1. a. Il fallait lire bien sûr $a^n - b^n$

sinon : $(a-b)^n = (a-b)(a-b)^{n-1} \dots \quad n \in \mathbb{N}^*$

1. Alors que $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \quad , n \in \mathbb{N}^*$

$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

1 b. $A = a^n - 1 = a^n - 1^n = (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$

1 $B = a^n + 1 = a^n + 1^n = (a+1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k}$

(2) 2. a. L'application $f$ définie par un ensemble de départ $I$

1 et par un ensemble d'arrivée $J$ est une relation de $I$ vers $J$ pour laquelle chaque élément de $I$ possède une image et une seule dans $J$

0.5 b. Soit $A \subset I$. On appelle image directe de $A$ l'ensemble $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$ on le note également $f\langle A \rangle$.

0.5 c. Soit $B \subset J$ on appelle image réciproque de $B$, l'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in I ; f(x) \in B\}$.

4

Exercice 1 $n \in \mathbb{N}^*$

1. a. $$\sum_{1 \le k,\ell \le n} |k-\ell| = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{\ell=1}^{n} |k-\ell| \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{\ell=1}^{k-1} |k-\ell| + \sum_{\ell=k}^{n} |k-\ell| \right)$$
1 $$= \sum_{k=1}^{n} \left( \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k-1} (k-\ell)}_{①} + \underbrace{\sum_{\ell=k}^{n} (\ell-k)}_{②} \right)$$

b. on pose $p = k-\ell$ dans ① et $p = \ell-k$ dans ②

1 ① $$\sum_{\ell=1}^{k-1} (k-\ell) = \sum_{p=k-1}^{1} (p) = \sum_{p=1}^{k-1} p$$

② $$\sum_{\ell=k}^{n} (\ell-k) = \sum_{p=0}^{n-k} p$$

donc
$$\sum_{\ell=1}^{k-1} (k-\ell) + \sum_{\ell=\ell}^{n} (\ell-k) = \sum_{p=1}^{k-1} p + \sum_{p=0}^{n-k} p$$

1 c. $$\sum_{p=1}^{k-1} p = \frac{(k-1)k}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n-k} p = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

donc $$\sum_{\ell=1}^{k-1} (k-\ell) + \sum_{\ell=k}^{n} (\ell-k) = \frac{(k-1)k + (n-k)(n-k+1)}{2}$$
$$= \frac{2k^2 - 2k(n+1) + n(n+1)}{2} = k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2}$$

1 d. Finalement

$$\sum_{1 \le k,\ell \le n} |k-\ell| = \sum_{k=1}^{n} \left[ k^2 - (n+1)k + \frac{n(n+1)}{2} \right]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6} (2n+1 - 3(n+1) + 3n) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$

② 2. a. $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ $\left((n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!} = (k+1)\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k+1)!}\right)$

1 ( 0.5

0.5 donc $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$

1 b. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

⑤ <u>Exercice 2</u>

1 1. $D = \frac{1}{(1+2i)\ (3-i)} = \frac{1}{5(1+i)} = \frac{1-i}{5(1^2+i^2)} = \frac{1-i}{10} = \frac{1}{10} - i\frac{1}{10}$

2. $E = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-i}\right)^{20} = \left(\frac{i-1\sqrt{3}}{-i^2}\right)^{20} = (i-\sqrt{3})^{20}$

1 $= (-\sqrt{3}+i)^{20} = \left(2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\right)^{20}$

$= 2^{20}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{20}$

$= 2^{20}\left[e^{i5\pi/6}\right]^{20}$

$= 2^{20}\left[e^{i\,50/3\,\pi}\right]$

1 or $\frac{50}{3}\pi = \frac{2\pi}{3} + 2.8\pi$

Donc $E = 2^{20}.\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$

1 3. (a) $(1+2i)^2 = -3+4i$

(b) $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$ $\Delta' = i - (2-4i) = -3+4i = (1+2i)^2$

1 donc $z_1 = i + (1+2i) = 1+3i$

$z_2 = i - (1+2i) = -1-i$

4

**Exercice 3 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $0 < n \leq n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Par conséquent $0 < n^n \leq (n+1)^n$ "

( la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

2

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n \leq (n+1)^n$

2. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ : " $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$ "

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2 $\mathcal{P}(1)$ : $2^0 = 1$, $1! = 1$ , $1^1 = 1$. Donc $2^0 \leq 1! \leq 1^1$. ok.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie :

Or , comme $n \geq 1$ on a $2 \leq n+1$ d'où

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1)\, n! \leq (n+1)!$$

Donc la première inégalité est vérifiée.

Pour l'autre inégalité :

on a par l'hypothèse de récurrence $n! \leq n^n$

en multipliant par $n+1 > 0$ on a $(n+1)!\ (n+1)n^n$

or $n \leq n+1$ et donc $n^n \leq (n+1)^n$ (d'après 1)

donc $(n+1)! \leq (n+1)\,(n+1)^n = (n+1)^{n+1}$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée , ce qui prouve que $\mathcal{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

+2

**BONUS**

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff (z-3)^2 = \frac{1}{2}(z-5)^2$$

$$\iff (z-3)(\overline{z-3}) = \frac{1}{2}(z-5)(\overline{z-5})$$

$$\iff z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 7$$

$$\iff |z-1|^2 = 8$$

$$\iff |z-1| = 2\sqrt{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} = ab^{n-1} + a^2 b^{n-2} + a^3 b^{n-3} + \dots + a^n b^0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$