Université Claude Bernard Lyon 1
Licence Sciences & Technologies

Fondamentaux des mathématiques I
Automne 2017

Contrôle continu partiel écrit (2 heures)

BIEN INDIQUER SON NUMERO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE.
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé.
La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1- (7 points - 40 minutes)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. (a) (3 points) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme suivante
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$
      i. Quelle type de somme reconnaît-on ?
      ii. Calculer S_n en fonction de n.
      iii. En déduire la valeur de S_{100} sous forme d'une fraction irréductible.

2. (a) Soit i le nombre complexe noté $(0, 1)$. Montrer que $i^2 = -1$
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Donner la forme algébrique de $\frac{1}{z}$, l'inverse de z.

3. (a) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ une application dérivable en $a \in I$. Énoncer la définition de $f'(a)$.
   (b) Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une application dérivable en $f(a)$. Quelle est la formule de la dérivée de $g \circ f$ en a ?
   (c) Application : on suppose en plus de $f : I \to J$ est bijective, de réciproque f^{-1}. Quelle est alors, pour tout $y \in J$, la dérivée de f^{-1} en y ? Justifier votre réponse.

Exercice 2- (7 points - 40 minutes)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. (4 points) Soit ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Est-ce que ch est :
   (a) Injective ? Justifier.
   (b) Surjective ? Justifier.
2. On considère maintenant ch : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $\text{ch}'(x)$.
   (b) Montrer que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. On veut maintenant résoudre pour $y \in [1, +\infty[$
$$\text{ch}(x) = y \text{ où } x \in [0, +\infty[\text{ est donné.}$$
   (a) Montrer que pour $x \in [0, +\infty[$
$$\text{ch}(x) = y \text{ est équivalent à résoudre } X^2 - 2yX + 1 = 0,$$
   où $X = e^x \geq 1$.
   (b) Résoudre $X^2 - 2yX + 1 = 0$, pour $X \geq 1$ et $y \geq 1$.
   On distinguera le cas $y = 1$ du cas $y > 1$.
   (c) En déduire que ch : $\mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est bijective, et donner son application réciproque.

Exercice 3- (7 points - 40 minutes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n + 1$ réels $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ tels que
$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq 1.$$
On considère la proposition $P(i)$ suivante :
$$\exists i \in 1, ..., n, \quad x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}.$$

1. Écrire la négation de cette proposition.
2. Supposons que la négation de la propriété vraie. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$x_n - x_0 > n.\frac{1}{n} = 1.$$
Indication : on pourra considérer
$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + ...(x_1 - x_0)$$
3. En déduire une contradiction.
4. Que peut-on en conclure pour la proposition $P(i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?