Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Fondamentaux des mathématiques I
Séquence 3+5, Info - Automne 2016

Contrôle continu partiel écrit (2 heures)
20 octobre 2016

BIEN INDIQUER SON GROUPE DE TD SUR LA COPIE.
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La durée des exercices n'est donnée qu'à titre indicatif.
La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Cours - (5 points - 30 minutes)

1. (3 points) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimer $(a+b)^n$ en utilisant $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{N}$, dont on rappellera la définition.
   (b) Application : calculer, en justifiant les réponses, les sommes suivantes,
   $$\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k.$$
2. (2 points)
   (a) Énoncer la définition d'une application injective.
   (b) Énoncer la définition d'une application surjective.

Exercice 1- (5 points - 30 minutes)

1. (4 points) On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.
   (a) (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)k$.
   (b) (3 points) On pose $v_k = k(k-1)(k-2)$.
      i. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 3k(k-1)$.
      ii. Calculer alors $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$ en fonction de S_n.
      iii. En déduire un lien entre S_n et T_n ?
2. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{C} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} 2^{k-l}$.

Exercice 2- (5 points - 30 minutes)

1. (1 point) Mettre D $= \dfrac{5+i\sqrt{2}}{1+i}$ sous forme algébrique.
2. (2 points) Soient a et $b \in \mathbb{C}$.
   (a) Calculer $(|a+b|+|a-b|)^2 - (|a|+|b|)^2$.
   (b) En déduire en justifiant votre réponse que $|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$.
   (c) Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
3. (2 points)
   (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ $z^3 - i = (z+i)(z^2 - iz - 1)$.
   (b) Utiliser la question précédente pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
   $$z^3 - i = 6(z+i).$$

Exercice 3- (5 points - 30 minutes)

1. (2 points) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
   "pour tout réel $x > 0$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$."
2. (3 points) Montrer que la relation $Z = (1+i)z + 2 - i$, où Z et z sont complexes, définit une similitude directe dont on précisera le centre, l'angle et le rapport.

Cours :

(3) 1. a. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

1 où pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

1 b. $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

1 $B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^k = 0$

(2) 2. a. On dit qu'une application $f : I \to J$ est injective si et seulement si tout élément y de J admet au plus

1 un antécédent dans l'ensemble I

ce qui s'écrit : $\forall x_1, x_2 \in I$ si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.

b. On dit qu'une application $f : I \to J$ est surjective si et seulement si tout élément y de J admet au moins

1 un antécédent dans I.

Ce qui s'écrit $\forall y \in J$, il existe $x \in I$ t.q. $f(x) = y$.

Exercice 1

1. a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1)k = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$

b. $v_k = k(k-1)(k-2) \qquad k \in \mathbb{N}^*$

i) $v_{k+1} = (k+1)k(k-1) \qquad k \in \mathbb{N}^*$

donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$v_{k+1} - v_k = k(k+1)(k-1) - k(k-1)(k-2)$

$= k(k-1)(k+1-k+2) = 3k(k-1)$

ii) $T_n = \sum_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n} 3k(k-1) = 3\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$

$= 3S_n$

Finalement $S_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{3}(v_{n+1} - v_1) = \frac{1}{3}v_{n+1}$

$= \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$

on retrouve le résultat du a)

2. $C = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} 2^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{2^\ell}$

$= \left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)\cdot\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right) = (2^{n+1}-1)\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = \frac{(2^{n+1}-1)^2}{2^n}$

Exercice 2

1. $D = \frac{5+i\sqrt{2}}{1+i} = \frac{(5+i\sqrt{2})(1-i)}{1-i^2} = \frac{5-5i+i\sqrt{2}-i^2\sqrt{2}}{2} = \frac{5+\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{-5+\sqrt{2}}{2}\right)$

2. a. $(|a+b|+|a-b|)^2 - (|a|+|b|)^2 = |a+b|^2 + |a-b|^2 + 2|a+b||a-b|$
$\qquad - |a|^2 - |b|^2 - 2|a||b|$

$= (a+b)^2 + (a-b)^2 + 2|(a+b)(a-b)| - a^2 - b^2 - 2|a||b|$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2|a^2-b^2| - a^2 - b^2 - 2|a||b|$

$= a^2 + b^2 - 2|a||b| + 2|a^2-b^2|$

$= 2|a^2-b^2| + (|a|-|b|)^2 \geq 0$

b. on a d'après a) $|a+b|^2 + |a-b|^2 \geq (|a|+|b|)^2 \geq 0$
pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, et donc en passant à la racine :
$$|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

c. On a égalité si et seulement si $a^2 = b^2$
c'est à dire $a = b$ ou $a = -b$

3. a. $(z+i)(z^2 - iz - 1) = z^3 - iz^2 - z + iz^2 - i^2 z - i = z^3 - i$

b. $z^3 - i = 6(z+i) \iff (z+i)(z^2 - iz - 1) = 6(z+i)$ (d'après a)
$\iff (z+i)(z^2 - iz - 7) = 0$

$\iff \begin{cases} z_1 = -i \\ \text{ou} \\ z^2 - iz - 7 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = 27 = (3\sqrt{3})^2$

$\iff \begin{cases} z_1 = -i \\ z_2 = \frac{1}{2}(i - 3\sqrt{3}) \text{ et } z_3 = \frac{1}{2}(i + 3\sqrt{3}) \end{cases}$

Exercice 3

1. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $\forall x>0$, x réel, $(1+x)^n \geq 1+nx$ "

$\mathcal{P}(0)$: $x>0$, $(1+x)^0 = 1$ et $1+0x = 1$ on a bien $1 \geq 1$. ok

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit x réel >0

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n . (1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x + \underbrace{x^2 n}_{\geq 0}$$

$$\geq 1+(n+1)x$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

Conclusion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. l'application $z \to (1+i)z + 2-i$

est une similitude directe de rapport $|1+i| = \sqrt{2}$

et d'angle $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$.

le centre Ω est le point d'affixe ω qui vérifie

$\omega = (1+i)\omega + 2-i$ càd $\omega = 1+2i$

La similitude est donc la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de centre Ω et de rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de même centre