Contrôle continu partiel écrit (2 heures)
9 novembre 2017

BIEN INDIQUER SON GROUPE DE TD SUR LA COPIE.
Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La durée des exercices n'est donnée qu'à titre indicatif.
La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1- (7 points - 40 minutes)

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. (2 points)
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la somme suivante
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$
      i. Quelle type de somme reconnaît-on ?
      ii. Calculer S_n en fonction de n.
      iii. En déduire la valeur de S_{100} sous forme d'une fraction irréductible.
2. (2.5 points)
   (a) Énoncer la définition d'une application convexe.
   (b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
   $$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x^2 + 4.$$
      i. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer f' et f''.
      ii. Déterminer les intervalles où la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est convexe, puis ceux où elle est concave. Admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.
3. (1.5 point) Soit $z \in \mathbb{C}$.
   (a) Si $z = \overline{z}$ que peut-on en conclure ?
   (b) Si $z = -\overline{z}$ que peut-on en conclure ?
   (c) Exprimer $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

Exercice 2- (8 points - 50 minutes)

Le but de cet exercice est d'étudier l'application $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}}\right)$.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\text{th}(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$, où $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Considérerons d'abord l'application $g : x \mapsto g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.
   (a) Montrer que g est bien définie sur cet intervalle I et calculer ses limites en -1 et 1. La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ possède-t-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles.
   (b) Calculer la dérivée de g sur I. En déduire son signe sur I.
   (c) Tracer un tableau de variations de g .
2. On considère maintenant th.
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\text{th}'(x)$ en fonction de $\text{ch}(x)$. En déduire que th est strictement croissante.
   (b) Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de th.
   (c) En déduire que th est définie de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, écrire $g(\text{th}(x))$ et justifier que $g \circ \text{th}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
4. D'après la question 1c, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\dfrac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}}$ est bien définie et qu'elle est strictement positive. En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ montrer que $\dfrac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)} = e^{2x}$.
6. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
7. Que peut-on en déduire sur la bijectivité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Exercice 3- (6 points - 30 minutes)

Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition “$5^n + 1$ est pair”. L'objectif est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. (3 points) Montrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
2. (3 points) Montrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par l'absurde.
3. (Bonus= 2 points)
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $x^n - 1$.
   (b) En déduire que $5^n - 1 = (5-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 5^k$.
   (c) Montrer alors que $5^n - 1 = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$ est à déterminer.
   (d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n + 1$ est pair.