Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

MASTER 1
Ingénierie Mathématique
UE :Systèmes dynamiques Printemps 2014

Contrôle Final Ecrit -Systèmes dynamiques
26 mai 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 3h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (30 minutes) (4 points)

1. (3 points) Enoncer la définition de la stabilité structurelle ainsi que les résultats évoquant sa relation avec les équilibres hyperboliques et non hyperboliques. Donner un exemple d'un système planaire possédant un équilibre hyperbolique, et un systèmes planaire possédant un équilibre non hyperbolique.
2. (1 point) Enoncer, sans le démontrer le théorème de Poincaré-Bendixson.

Exercice 1 (30 minutes) (4 points)

Pour les 2 systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & -x & + & 3y, \\ \dot{y} & = & -3x & + & 5y, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad (S_2) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x} & = & 5x & + & y, \\ \dot{y} & = & -2x & + & 3y, \end{array} \right.$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. En déduire la matrice de passage P.
3. Donner les solutions du système dans la base où la matrice est diagonale (ou de Jordan).
4. Tracer (avec soin) les orbites représentant ces solutions.
5. En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques dans la base initiale.
6. BONUS : tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère initial.

Exercice 2 (30 minutes) (4 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(S_3)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl}\dot{x} & = & -2x & + & y,\\ \dot{y} & = & x^2 & - & y+\mu,\end{array}\right.$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et μ est un nombre réel.

1. Déterminer les isoclines nulles et les dessiner soigneusement en fonctions des valeurs de μ.
2. En déduire les équilibres en fonctions des valeurs de μ.
3. Etudier la stabilité de ces valeurs en fonction des valeurs de μ.
4. En déduire la nature des bifurcations quand μ varie.
5. Tracer quelques portraits de phase suivant différentes valeurs de μ bien choisies.

Exercice 3 (30 minutes) (4 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(S_4)\quad \left\{\begin{array}{rcrcl}\dot{x} & = & y, & & \\ \dot{y} & = & -2y & + & z,\\ \dot{z} & = & -Kx & - & z,\end{array}\right.$$

où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et K est un nombre réel.

1. Donner le polynôme caractéristique permettant de trouver les valeurs propres de ce système en fonctions de K.
2. D'après un critère évoqué en cours, donner les conditions sur K pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.

Exercice 4 (30 minutes) (4 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(S_5)\quad \left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} & = & -xy,\\ \dot{y} & = & x^2+x,\end{array}\right.$$

où x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Ce système est-il conservatif ?
2. Si oui, trouver la quantité conservée.
3. Dessiner alors les solutions sur les courbes de niveau définies par la quantité trouvée dans la question précédente.

Exercice 5 (30 minutes) (4 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(S_6) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1 - 4x + x^2 y, \\ \dot{y} & = & x(3 - xy), \end{array} \right.$$

où x est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et y sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les isoclines nulles de ce système.
2. En déduire les équilibres de ce système.
3. Déterminer le sens de variation de x et y entre les isoclines nulles et sur celles-ci.
4. Etudier la stabilité linéaire des équilibres.
5. Construire une “boîte” autour de l’équilibre non trivial dont les orbites ne peuvent pas sortir.
6. En déduire l’existence d’au-moins un cycle limite autour de cet équilibre.
7. Illustrer vos réponses sur un graphe soigné.