Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L2- Printemps 2017

Contrôle Final Ecrit - Analyse Numérique
9 mai 2017

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document n'est autorisé. L'usage des téléphones et calculatrices est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est donné qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Question de cours (20 minutes) (7 points)

1. (2 points) Énoncer (sans le démontrer) le théorème du point fixe.
2. (5 points) On rappelle que la structure générale d'un schéma de Runge-Kutta à s-stages explicite associé à un problème de Cauchy est donné par le système suivant

$$(RK)\quad \left\{\begin{array}{rcl} X_i &=& x_n + h\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j h, X_j), \quad i = 1, ..., s \\ x_{n+1} &=& x_n + h\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n + c_i h, X_i). \end{array}\right.$$

avec $n = 0, ..., N-1$, $a_{i,j}$, b_i, $c_i \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ donné.

(a) (2 points) Montrer que ce schéma est consistant d'ordre au moins 1 si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{s} b_i = 1.$

(b) (3 points) Montrer que ce schéma est consistant d'ordre au moins 2 si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 1 (60 minutes) (18 points)

On considère le problème de Cauchy suivant : trouver $u \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que

$$(\mathscr{S}_1) \left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& -100u(t) + 25, \\ u(0) &=& 1, \end{array}\right.$$

1. **Partie 1 : solution exacte de $(\mathscr{S}_1)$ (5 points)**
   (a) (1.5 point) Donner l'ordre de l'équation de ce système et dire si elle est linéaire ou non, autonome ou non ? Justifier votre réponse.
   (b) (1 point) Ce système admet-il une solution globale unique pour $t \in [0, 1]$? Justifier.
   (c) (1.5 point) Donner la solution exacte de $(\mathscr{S}_1)$.
   (d) (1 point) Vers quoi tend la solution quand t tend vers l'infini ?
2. **Partie 2 : schéma d'Euler explicite (7 points)**
   (a) (1 point) Écrire le schéma explicite pour $(\mathscr{S}_1)$.
   (b) (2 points) Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   (c) (1 point) En déduire u_n en fonction de n et de h.
   (d) (1 point) On suppose $h = 1/25$. Calculer u_n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n|$.
   (e) (1 point) Que peut-on conclure pour la A-stabilité de ce schéma ?
   (f) (1 point) Quelle valeur de $h > 0$ maximale faut-il choisir pour que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n|$ soit finie ?
3. **Partie 3 : schéma d'Euler implicite (6 points)**
   Reprendre les questions (a) à (e) de la partie 2, en remplaçant schéma explicite par schéma implicite. La question f a-t-elle un sens ici ? Justifier vos réponses.

Exercice 2 (40 minutes) (9 points)

On considère l'équation

$$(\mathscr{E}) \quad x(1 + e^x) = e^x, \text{ où } x \in \mathbb{R}.$$

1. (2 points) Montrer que cette équation admet une unique solution réelle l dans $[0, 1]$.
2. (3 points) On pose f_1 la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
   $$f_1(x) = x(1 + e^x) - e^x.$$
   (a) (3 points) Écrire la méthode de Newton-Raphson pour approcher la solution l en se servant de la fonction f_1 précédente. Est-ce que la suite construite par cette méthode est toujours définie ? Justifier la réponse.
   (b) **Bonus : (+2 points)** Justifier le fait que la suite construite à partir de cette méthode converge et donner l'ordre de convergence de l'erreur.
   (c) **Bonus : (+1 point)** Donner une interprétation graphique de cette méthode.
3. (4 points) On considère maintenant la fonction f_2 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
   $$f_2(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$
   On considère également la suite définie par :
   $$x_0 \in [0, 1], \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ par } x_{n+1} = f_2(x_n).$$
   (a) (1.5 point) Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f_2.
   (b) (1.5 point) Montrer que f_2 est strictement contractante dans cet intervalle.
   (c) (1 point) En déduire que la suite converge vers la solution de l'équation $(\mathscr{E})$ dans $[0, 1]$.