**Université Claude Bernard Lyon 1**
**43, boulevard du 11 novembre 1918**
**69622 Villeurbanne cedex, France**

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Syst. Dyn. Printemps 2017

# Contrôle Final Écrit - Systèmes Dynamiques Master 1
17 mai 2017

## Avant propos.

La durée de l'examen est de 3h. Seule une feuille (format A4) de note est autorisée. L'usage des téléphones et calculatrice est prohibé durant l'épreuve. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

## Exercice 1 (60 minutes) (10 points)

On considère le système non-linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_1)\quad \left\{\begin{array}{lcl} x' &=& y, \\ y' &=& z^2\sin(x)\cos(x)-\sin(x)-\mu y, \\ z' &=& \cos(x)-\rho, \end{array}\right.$$

où $x$, $y$ et $z$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et les paramètres $\mu$ et $\rho$ sont des réels strictement positifs.

1. Justifier l'existence et l'unicité locale de solutions de ce système soumis à une condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbb{R}^3$ donnée.
2. Calculer le ou les équilibres en fonction de $\rho$.
3. Dans la suite nous choisissons $\rho = 1/2$.
   (a) Montrer que les équilibres valent $(\pi/3, 0, \sqrt{2})$ et $(\pi/3, 0, -\sqrt{2})$.
   (b) Donner la matrice jacobienne associée au système linéarisé de $(\mathscr{S}_1)$.
   (c) Étudier la nature (stabilité) des deux équilibres précédemment donnés en fonction des valeurs de $\mu$.

## Exercice 2 (40 minutes) (10 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_2)\quad \left\{\begin{array}{lcrl} x' &=& x & , \\ y' &=& 3y & +z, \\ z' &=& -y & +z, \end{array}\right.$$

où $x$, $y$ et $z$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Trouver les valeurs propres associées à ce système $(\mathscr{S}_2)$.
2. Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
3. Donner l'expression de la matrice fondamentale associée à $(\mathscr{S}_2)$.
4. En déduire l'expression des solution de $(\mathscr{S}_2)$.

## Exercice 3 (40 minutes) (10 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_3) \quad \left\{ \begin{array}{rcrrl} x' & = & - & x^3 & -y, \\ y' & = & & x & . \end{array} \right.$$

où $x$ et $y$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est bien le seul équilibre de $(\mathscr{S}_3)$.
2. Déterminer les isoclines nulles et les dessiner soigneusement.
3. Étudier la nature et le type de l'équilibre si c'est possible. Si ce n'est pas possible de conclure expliquer pourquoi.
4. A partir de maintenant nous étudions le problème en coordonnées polaires.
   (a) Montrer que l'on obtient pour $r$, l'équation
   $$r' = -r^3 \cos^4(\theta)$$
   (b) Montrer que l'on obtient pour $\theta$ l'équation
   $$\theta' = 1 + r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta).$$
   (c) En déduire si l'équilibre est un centre ou un foyer stable ou instable.
   (d) Dessiner soigneusement les orbites représentant ce système.

## Exercice 4 (40 minutes) (10 points)

On considère le système non linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_4) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) - y, \\ y' & = & y \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) + x. \end{array} \right.$$

où $x$ et $y$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Chercher le ou les équilibres de $(\mathscr{S}_4)$.
2. A partir de maintenant nous étudions le problème en coordonnées polaires.
   (a) Déterminer les équations différentielle pour $r$ et $\theta$ liées au système $(\mathscr{S}_4)$.
   (b) En déduire si l'équilibre est un centre ou un foyer stable ou instable.
   (c) Ce système possède-t-il aucun, un ou plusieurs cycles limites ? Si oui, lesquels ?
   (d) Dessiner soigneusement les orbites représentant ce système.