Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Master 1 - Maths Appliquées
et Statistiques
UE : Syst. Dyn. Printemps 2020

Contrôle Final Écrit - Systèmes Dynamiques Master 1
15 avril 2020

Avant propos.

La durée de cet examen à distance est de 3h00 (2h de théorie et 1h de numérique approximativement). **Environ 20 minutes après l'épreuve seront laissées à disposition pour scanner et téléverser votre copie sur Tomuss ou me l'envoyer par e-mail. Le nom du fichier sera votre numéro d'étudiant.** La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et particulièrement pris en compte lors de la notation. **Attention : une partie numérique est demandée avec les simulations et des explications à la fin des exercices 2 et 3.**

Exercice 1 (60 minutes) (10 points)

On considère le système linéaire suivant :

$$(\mathscr{S}_5) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & y & + & \alpha z, \\ y' & = & -x & + & \alpha y & - & z, \\ z' & = & \alpha x & - & y & + & z, \end{array} \right.$$

où x, y et z sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et α est un nombre réel.

1. Donner le polynôme caractéristique permettant de trouver les valeurs propres de ce système en fonctions de α.
2. D'après un critère évoqué en cours, donner les conditions sur α pour que l'équilibre soit asymptotiquement stable.
3. Application : on considère $\alpha = 0$
   (a) Vérifier le résultat de la question précédente pour $\alpha = 0$.
   (b) Toujours avec $\alpha = 0$, calculer les valeurs propres, les vecteurs propres de la matrice assocée à $(\mathscr{S}_5)$.
   (c) En déduire les solutions $(\mathscr{S}_5)$ pour $\alpha = 0$.

Exercice 2 (60minutes) (10 points)

On considère le problème linéaire suivant

$$(\mathscr{C}_3)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) + x_1(t)(-a - x_1^2(t) - x_2^2(t)), \\ x_2'(t) & = & -x_1(t) + x_2(t)(-a - x_1^2(t) - x_2^2(t)), \end{array} \right.$$

pour tout $t \in R$ et pour a un paramètre réel quelconque.

1. Expliquer pourquoi ce système $(\mathscr{C}_3)$ n'est pas linéaire.
2. Chercher les équilibres de ce système.
3. Étudier la nature et le type de ces équilibres en fonction du paramètre a.
4. Que peut-on en déduire pour le système non linéarisé ?
5. Nous allons essayer de pousser l'étude plus loin pour le système non linéaire $(\mathscr{C}_3)$.
   (a) Écrire le système avec les coordonnées polaires sous la forme

   $$(\mathscr{C}_4)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} r'(t) & = & f(r(t)), \\ \theta'(t) & = & g(\theta), \end{array} \right.$$

   pour $t \in \mathbb{R}$, en fonction de a.

   (b) Chercher les équilibres de ce système.

   (c) Tracer le graphe de f en fonction de r.

   (d) En déduire la stabilité des équilibres.

   (e) A-t-on apparition d'un cycle limite pour ce système $(\mathscr{C}_3)$ en fonction de a ? Si oui, est-il stable ? Instable ? Pour quelles valeurs de a ?

   (f) Illustrer **numériquement** la question précédente (le choix de l'intervalle de t , de la condition initiale ainsi que les valeurs de a est laissé libre).

Exercice 3 (60 minutes) (10 points)

On considère l'équation différentielle linéaire homogène, d'ordre 2 suivante :

$$(\mathscr{E}_5)\ \ x''(t) + cx'(t) + x(t)(1 - x(t)) = 0,$$

avec $t \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}_+$. Nous supposerons ici que x désigne une population, autrement dit, nous chercherons les solutions de telle sorte que $x(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer, après un changement de variable approprié que cette équation peut s'écrire de la forme suivante

   $$(\mathscr{S}_5)\quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & -cv(t) - x(t)(1 - x(t)), \end{array} \right.$$

2. Comment pourrait-on interpréter $v(t)$?
3. En déduire les équilibres de ce système.
4. Déterminer le sens de variation de x et v entre les isoclines nulles et sur celles-ci.

5. Étudier la nature et le type des équilibres en fonction de c.
6. Montrer que suivant l'hypothèse biologique $x(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, il est nécessaire de choisir $c \geq 2$.
7. Tracer **numériquement** les orbites (v en fonction de x) pour $c = 2$ prendra $t \in [-20, 20]$ et $(x(-20), v(-20)) = (0.9, -0.1)$.
8. Tracer **numériquement** les trajectoires (x en fonction de t pour $c = 2$ on prendra $t \in [-20, 20]$ et $(x(-20), v(-20)) = (0.9, -0.1)$.