Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
Analyse numérique L2- Printemps 2017

Contrôle Partiel Ecrit - Analyse Numérique
17 mars 2017

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document n'est autorisé. L'usage des téléphones et calculatrices est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est donné qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Question de cours (20 minutes) (5 points)

1. (a) (2 points) Énoncer (sans le démontrer) le théorème de convergence de Newton-Raphson pour la résolution d'une équation du type $f(x) = 0$.
   (b) (1 point) Donner une interprétation graphique de ce théorème.
2. (2 points) Énoncer, sans le démontrer le théorème d'interpolation par les polynômes de Lagrange.

Exercice (100 minutes) (15 points)

1. **Partie 1 : (5 points) (40 min)**
   Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^5$. On note
   $$\begin{array}{llllll} x_0 = & -1, \quad x_1 = & -1/2, \quad x_2 = & 0, \quad x_3 = & 1/2, \quad x_4 = 1, \\ y_0 = & 1, \quad y_1 = & -1/2, \quad y_2 = & 1, \quad y_3 = & -1/2, \quad y_4 = 1, \end{array}$$
   où pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$ les x_i sont des nœuds sur $[-1, 1]$ et les y_i les valeurs respectives prises par f en ces nœuds.
   (a) (2 points) Déterminer le polynôme d'interpolation $\mathscr{P}_4$ de f aux nœuds x_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ci-dessous
   $$P_4(x) = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)(x+\frac{1}{2}) + a_3(x+1)(x+\frac{1}{2})x + a_4(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-\frac{1}{2}),$$
   en évaluant les coefficients a_i grâce à la résolution d'un système obtenu par l'écriture des conditions $P_4(x_i) = y_i$, pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$.
   (b) (1 point) Comment se nomme cette méthode ?

(c) (1 point) Donner la formule réduite de ce polynôme (sous la forme $b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$).

(d) (1 point) Déterminer la forme de Lagrange d'interpolation de f en ces nœuds.

(e) (BONUS : 1 point) Retrouver le polynôme P_4 sous forme réduite ci-dessus.

2. **Partie 2. (6 points) (30 min)**
On pose désormais $f(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.

(a) (1 point) Justifier que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ est bien définie et la calculer.

(b) (1 point) Rappeler la formule de quadrature par la méthode de Simpson pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

(c) (1 point) Donner la valeur de l'approximation de cette intégrale obtenue par la méthode de Simpson.

(d) (1 point) Calculer l'erreur exacte en se servant du calcul explicite de I.

(e) (1 point) Rappeler la formule de l'erreur de quadrature pour cette méthode. Donnez une estimation de l'erreur pour la fonction f de cette partie, et la comparer avec l'erreur calculée dans la question précédente.

(f) (1 point) Est-ce que cela confirme ce que l'on savait sur l'ordre de cette méthode ?

3. **Partie 3. (4 points) (30 min)**

(a) (2 points) On note z_1 et z_2 deux réels non nuls de $]-1, 1[$, tels que $z_1 < z_2$ et α, β, γ trois coefficients réels.
Déterminer z_1, z_2, α, β et γ tels que l'expression

$$G(f) = \alpha f(z_1) + \beta f(0) + \gamma f(z_2),$$

soit une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 4 sur $[-1, 1]$.

(b) (2 points) Cette méthode est-elle d'ordre 5 ? D'ordre 6 ?