

Contrôle Partiel Ecrit - Systèmes Dynamiques Master 1
22 mars 2017

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (4 points)

1. (2 points) Énoncer sans le démontrer, le théorème des bouts.
2. (2 points) Énoncer la définition d'une équation aux différentielles totales.

Exercice 1 (50 minutes) (9 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathcal{E}_1) \quad x(t)(t + x(t) + 1) + (t + 2x(t))x'(t) = 0.$$

1. (1 point) Expliquer pourquoi l'équation $(\mathcal{E}_1)$ n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_1)$ n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (2 point) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation $(\mathcal{E}_1)$.
4. (2 point) Déterminer une fonction $F : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, toute fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, on ait

$$x \text{ solution de } (\mathcal{E}_1) \text{ sur } I \iff \text{il existe } K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in I, F(t, x(t)) = K.$$

5. (1 point) Sans la calculer explicitement, montrer qu'il existe une solution x à $(\mathcal{E}_1)$ vérifiant de plus $x(0) = 1$.
6. (1 point) Résoudre pour x l'équation $e^t x^2 + t e^t x - 1 = 0$.
7. (1 point) En déduire les solutions de $\mathcal{E}_1$ sous la condition initiale $x(0) = 1$.

Exercice 2 (50 minutes)(9 points)

1. Considérons l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_2) \quad x'(t) = rx(t) - 2x^2(t) + x^3(t),$$

où r est une constante réelle, et $t \in I \subset \mathbb{R}$.

- (a) (1 point) Montrer que l'on a l'existence et l'unicité locale de la solution de ce problème avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ donnée, où $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
- (b) (1 point) Montrer que $x_0^* = 0$ est un équilibre pour tout $r \in \mathbb{R}$.
- (c) (1 point) Étudier la stabilité de x_0^* en fonction de r et en déduire une bifurcation en un paramètre $r_1 \in \mathbb{R}$ à déterminer.
- (d) (1 point) Montrer que pour certaines valeurs prises par r il existe d'autres équilibres.
- (e) (2 points) Étudier la stabilité de ces équilibres en fonction des valeurs prises par r . Identifier un deuxième point de bifurcation.
- (f) (1 point) Nommer les types de bifurcations trouvées.
- (g) (1 point) Tracer avec soin le diagramme de bifurcation.
- (h) (1 point) Tracer avec soin quelques trajectoires représentatives suivant certaines valeurs de r .