Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Master 1 - Maths Appliquées
et Statistiques
UE : Syst. Dyn. Printemps 2020

Contrôle Partiel Ecrit - Systèmes Dynamiques Master 1
19 février 2020

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (4 points)

1. (2 points) Énoncer et montrer la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit aux différences totales.
2. (2 points) Montrer que pour une équation scalaire autonome $x' = f(x)$, avec f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ les solutions sont monotones.

Exercice 1 (40 minutes) (6 points)

Considérons l'équation différentielle suivante

$$(\mathscr{E}_1) \;\; 2x^2(t) + 3t + 2tx(t)x'(t) = 0.$$

1. (1 point) Expliquer pourquoi l'équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que l'équation $(\mathscr{E}_1)$ n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (2 points) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation $(\mathscr{E}_1)$.
4. (1 point) Déterminer une fonction $F : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout I intervalle de $\mathbb{R}$, toute fonction $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, on ait

$$x \text{ solution de } (\mathscr{E}_1) \text{ sur } I \iff \text{ il existe } K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall t \in I,\; F(t, x(t)) = K.$$

5. (1 point) Sans la calculer explicitement, montrer qu'il existe une solution x à $(\mathscr{E}_1)$ vérifiant de plus $x(0) = 1$.

Exercice 2 (30 minutes) (6 points)

Pour les deux systèmes suivants :

1. (2 points) Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. (1 point) En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques.
3. (2 points) Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans les repères avant changement de base par les matrices de passage.
4. (1 point) Pour le système A, tracer la solution vérifiant $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$.

$$A. \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x_1} & = & 10x_1 & - & 5x_2, \\ \dot{x_2} & = & 8x_1 & - & 12x_2, \end{array} \right. \quad B. \left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{x_1} & = & -6x_1 & + & 5x_2, \\ \dot{x_2} & = & -5x_1 & - & 4x2, \end{array} \right.$$

Exercice 3 (30 minutes) (6 points)

Considérons l'équation différentielle

$$(E_3) \;\; x' = (x-1)(a+3x-x^3),$$

où a est une constante réelle.

1. (1 point) Montrer que l'on a l'existence et l'unicité locale de la solution de ce problème avec une condition initiale $x(t_0) = x_0$ donnée.
2. (1 point) Trouver les équilibres de cette équation en fonction du paramètre a.
3. (2 points) Donner la stabilité de ces équilibres en fonction de a.
4. (1 point) Tracer soigneusement le diagramme de bifurcation.
5. (1 point) Donner le nom des différentes bifurcations rencontrées.

Exercice 1

1. a. $(2x^2+3t)+(2tx)x'=0$ le coefficient devant x' dépend de x donc c'est non linéaire

b. $(E_1) \Leftrightarrow (2x^2+3t)dt+(2tx)dx=0$

$\Leftrightarrow a(t,x)\,dt+b(t,x)\,dx=0$ où $a(t,x)=2x^2+3t$ et $b(t,x)=2tx$

On a $\frac{\partial a}{\partial x}=4x$ $\frac{\partial b}{\partial t}=2x$ $\frac{\partial a}{\partial x}\neq\frac{\partial b}{\partial t}$ donc (E_1) n'est pas une équation aux différentielle totale.

c. On remarque que $\dfrac{\frac{\partial a(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial b(t,x)}{\partial t}}{b(t,x)}=\frac{4x-2x}{2tx}=\frac{2x}{2tx}=\frac{1}{t}$

Donc en posant $\mu(t)=e^{\int\frac{1}{s}ds}=e^{\ln t}=t$ on a $\mu(t)=t$ comme facteur intégrant, en supposant que $t\in I\subset\mathbb{R}$, I ne contenant pas 0.

D'où $(E_1)\Leftrightarrow(2tx^2+3t^2)dt+(2t^2x)dx=0$

$\Leftrightarrow \tilde{a}(t,x)\,dt+\tilde{b}(t,x)dx=0$ où $\tilde{a}(t,x)=2tx^2+3t^2$ et $\tilde{b}(t,x)=2t^2x$

On a bien $\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x}=4t$ et $\frac{\partial\tilde{b}}{\partial t}=4t$ d'où $\frac{\partial\tilde{a}}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{b}}{\partial t}$

On cherche alors w t.q. $f=dw$ où $f:t\mapsto\tilde{a}(t,x)dt+\tilde{b}(t,x)dx$

On pose $\tilde{a}(t,x)=\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)$ d'où $w(t,x)=2\frac{t^2}{2}x^2+\frac{3t^3}{3}+c(x)=t^2x^2+t^3+c(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(t,x)=2t^2x+c'(x)$

or $\tilde{b}(t,x)=\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)$

donc par identification, on doit avoir $\cancel{2t^2x}+c'(x)=\cancel{2t^2x}$

$\Leftrightarrow c'(x)=0$

$\Leftrightarrow c(x)=K$, où $K\in\mathbb{R}$

Et donc $w(x)=t^2x^2+t^3+K$, $K\in\mathbb{R}$, $t\in I$

Par conséquent $(E_1)\Leftrightarrow t^2x^2+t^3+K=\tilde{C}$

$\Leftrightarrow t^2x^2+t^3=C$ où $C=\tilde{C}-K\in\mathbb{R}$ $(*)$

et résoudre (E_1) revient alors à résoudre $(*)$

Exercice 2 On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

A. (1) $X' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 8)(\lambda + 10)$

on a 2 valeurs propres distinctes réelles $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = -10$.

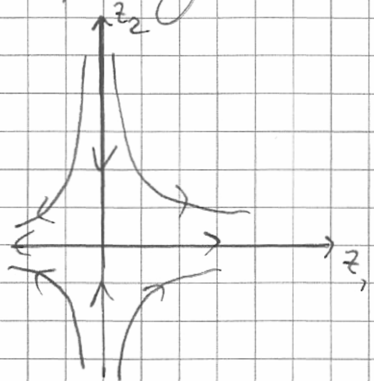
Pour $\lambda_1 = 8$ on trouve $K_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

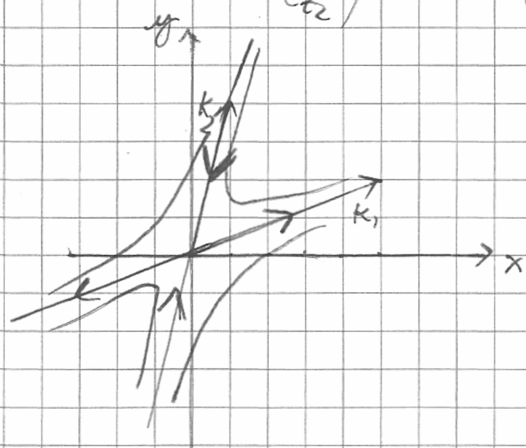
Pour $\lambda_2 = -10$ on trouve $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) Les solutions générales sont donc

$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10t}$ où c_1 et c_2 sont donnés par les conditions initiales

(3) Après changement de base on a $Z' = DZ$ où $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$





B. (1) $X' = BX$ où $B = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

$\det(B - \lambda I) = (-6-\lambda)(-4-\lambda) + 25 = 0$

on a deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_{1,2} = \dfrac{-10 \pm i 4\sqrt{6}}{2}$

$\alpha = -5$

$\beta = 2\sqrt{6}$ vecteur propre associé $K_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 2i\sqrt{6} \end{pmatrix}$

$Re(K_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Im(K_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$

donc $X_1 = \begin{pmatrix} 5 \cos(2\sqrt{6}t) \\ 1 \cos(2\sqrt{6}t) - 2\sqrt{6} \sin(2\sqrt{6}t) \end{pmatrix} e^{-5t}$

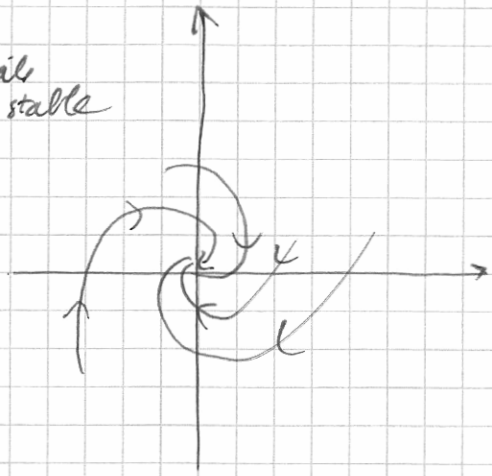
et $X_2 = \begin{pmatrix} 5 \sin(2\sqrt{6}t) \\ 2\sqrt{6} \cos(2\sqrt{6})t + \sin(2\sqrt{6}t) \end{pmatrix} e^{-5t}$

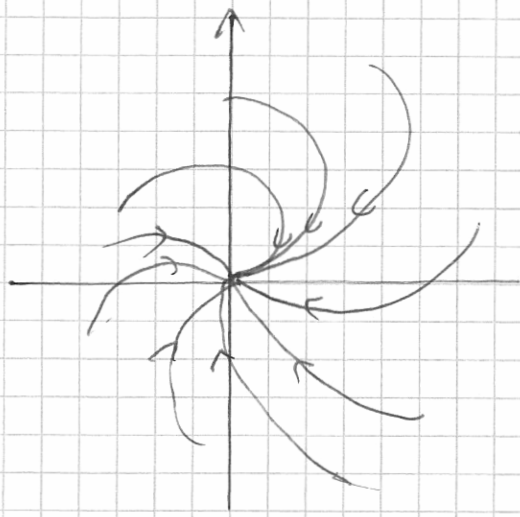
et $X(t) = c_1 X_1 + c_2 X_2$

$Re(\lambda_1) < 0$

$\Rightarrow$ spirale

foyer stable





Exercice 3:

1. $x' = (x-1)(a+3x-x^3)$, $a \in \mathbb{R}$

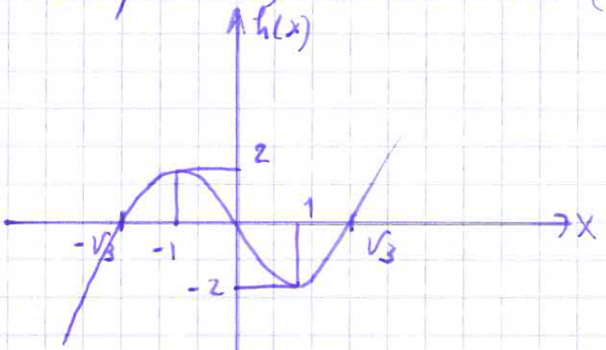
On pose $f(x) = (x-1)(a+3x-x^3)$ f est continue et même $\mathcal{C}^\infty$

Donc d'après un corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz on a l'existence et l'unicité locale autour de (t_0, x_0).

2. <u>Equilibres:</u> ce sont les x^* vérifiant $f(x^*)=0$

or $f(x^*)=0 \Leftrightarrow x^*=1$ ou $a+3x^*-x^{*3}=0$

- $x^*=1$ est toujours un équilibre quel que soit a
- $a+3x^*-x^{*3}=0$. On pose $h(x) = x^{*3}-3x^* = x^*(x^{*2}-3) = x^*(x^*-\sqrt{3})(x^*+\sqrt{3})$



h admet 1 maximum local en -1 et un minimum local en 1

$h(-1)=2$ et $h(1)=-2$

$a+3x^*-x^{*3}=0 \Leftrightarrow a = h(x)$

si $a>2$ $a=h(x)$ n'a qu'une seule solution : 1 seul équilibre supplémentaire

si $a=2$ " a 2 solutions : 2 équilibres "

si $-2<a<2$ " " 3 " : 3 " "

si $a=-2$ 2 " 2 "

si $a<-2$ 1 " 1 seul équilibre "

<u>Stabilité des équilibres:</u>

$f'(x) = (a+3x-x^3) + (x-1)(3-3x^2)$.

Pour $x^*=1$ $f'(1) = a+2$: $x^*=1$ est STABLE si $a<-2$
INSTABLE si $a>-2$

Pour les autres équilibres:

C'est à dire tels que $a+3x-x^3=0$

on a $f'(x^*) = (x-1)(3-3x^2) = 3(x-1)(1-x^2) = 3(x-1)(1-x)(1+x)$

$$= -3\underbrace{(1-x)^2}_{\geq 0}(1+x)$$

les equilibres sont stables si $x>-1$ et instables si $x<-1$

. Pour $a=2$ $\quad f'(x) = (2+3x-x^3) + (x-1)(3-3x^2)$

pour $x=-1$ $\quad f'(-1) = 0$

$f''(x) = 2(3-3x^2) - 6x(x-1)$

$f''(-1) = -12$: on a un shunt negatif

Pour $a=-2$

pour $x=1$ $\quad f'(x) = (-2+3x-x^3) + (x-1)(3-3x^2)$

$f'(1) = 0$

$f''(1) = 0$

$f'''(x) = -24x+6.$

$f'''(1) = -18 < 0$ on a un equilibre stable

4. fourche surcritique