Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

MASTER 1
Ingénierie Mathématique
UE :Systèmes dynamiques Printemps 2014

Contrôle Partiel Ecrit -Systèmes dynamiques
31 mars 2014

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Questions de cours (20 minutes) (5 points)

1. (3 points) Enoncer et démontrer le lemme de Gronwall donné sous la forme d'inéquation intégrale.
2. (2 points) Enoncer, sans le démontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz local.

Exercice 1 (30 minutes) (5 points)

Donner l'ensemble des solutions maximales et globales dans $I\!R$ de l'équation différentielle

$$(E_3) \quad |t|x' + x = t^2.$$

Exercice 2 (40 minutes) (6 points)

Soient a et b deux fonctions continues sur $I\!R$ à valeurs dans $I\!R$ et $T > 0$ un réel fixé. On considère le problème de Cauchy suivant

$$(\mathscr{C}) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & a(t)x(t) + b(t), \text{ pour } t > 0, \quad (E_2) \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right.$$

On pose également

$$k = \int_0^T a(s)ds.$$

1. Montrer que x est solution de $(\mathscr{C})$ sur $I\!R_+$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ est continue sur } I\!R_+, \quad \text{et,} \\ x(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)ds\right) x(0) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds. \end{array} \right.$$

2. Supposons la fonction b identiquement nulle. Montrer que l'équation (E_2) admet une solution unique x non nulle, telle que $x(0) = x(T)$ si et seulement si $k = 0$.
3. On suppose désormais b non identiquement nulle.
   (a) Montrer que si $k = 0$, l'équation (E_2) admet une solution unique x telle que $x(0) = x(T)$.
   (b) Montrer que si $k = 0$ l'équation (E_2) admet une solution unique x telle que $x(0) = x(T)$ si et seulement si
   $$\int_0^T \exp\left(\int_s^0 a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds = 0.$$
4. On suppose maintenant que a et b sont deux fonctions périodiques de période T et que $k = 0$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
   $$c(t) = \int_0^T \exp\left(\int_s^t a(\sigma)d\sigma\right) b(s)ds.$$
   (a) Montrer que c est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1
   (b) Soit x une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $x(t+T)$ en fonction de $x(t)$ et de $c(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
   (c) En déduire que toute solution de (E_2) est périodique de période T si et seulement si $c(0) = 0$.

Exercice 3 (30 minutes) (4 points)

Pour le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= 10x - 5y, \\ \dot{y} &= 8x - 12y, \end{cases}$$

1. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
2. En déduire la matrice de passage P.
3. Donner les solutions du système dans la base où la matrice est diagonale (ou de Jordan).
4. Tracer (avec soin) les orbites représentant ces solutions.
5. En déduire les solutions générales pour des conditions initiales quelconques dans la base initiale.
6. Tracer (avec soin) le portrait de phase des solutions dans le repère initial.