Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

MASTER 1
Ingénierie Mathématique
UE :Systèmes dynamiques Printemps 2015

Contrôle Partiel Ecrit -Systèmes dynamiques
12 mars 2015

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Une seule feuille de notes est autorisée durant l'épreuve. L'usage des téléphones et calculatrices est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est qu'à titre indicatif. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1 (40 minutes) (7 points)

(15 min) (4 points) On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1)\quad t^2 + x^2(t) - 5 = (x(t) + tx(t))x'(t),$$

pour $t \in I \subset I\!R$, où I sera à déterminer.

1. (1 point) Expliquer pourquoi cette équation (E_1) n'est pas linéaire.
2. (1 point) Montrer que cette équation (E_1) n'est pas une équation aux différentielles totales.
3. (2 points) Déterminer un facteur intégrant associé à l'équation (E_1) .
4. (2 points) Exprimer alors les solutions x dans une équation implicite.
5. (1 point) Donner la solution de (E_1) satisfaisant $x(0) = 1$.

Exercice 2 (40 minutes) (7 points)

1. On considère l'équation différentielle

$$(E_2)\quad x'(t) = \frac{x(t)}{a + x^2(t)},$$

où a est un paramètres réel strictement positif, et $t \in I \subset I\!R$ qu'il faudra préciser.

(a) (0.5 point) Montrer qu'une solution maximale de (E_2) non identiquement nulle de peut s'annuler.

(b) (0.5 point) En déduire la monotonie en fonction de la valeur de la condition initiale.

(c) (1 point) Résoudre l'équation différentielle (E_2) de façon implicite, en déterminant une relation du type $t = g(x)$ satisfaite par les solutions de (E_2).
On pourra se contenter de le montrer pour les solutions x strictement positives.

(d) (1 point) Montrer que g est bijective.

(e) (0.5 point) En déduire l'intervalle de définition des solutions maximales de (E_2).

2. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E_3) \quad x'(t) = \frac{x(t)}{2 + \sin(tx) + x^2(t)},$$

où $t \in I \subset I\!R$ qu'il faudra préciser.

(a) (0.5 point) Montrer que l'on a l'inégalité suivante

$$\frac{x}{3 + x^2} \leq \frac{x(t)}{2 + \sin(tx) + x^2(t)} \leq \frac{x}{1 + x^2},$$

pour les solutions x strictement positives.

(b) (1 point) En déduire que pour la condition initiale $x(0) > 0$, on aura

$$g_3(t) \leq g(t) \leq g_1(t),$$

où g, g_1 et g_3 sont respectivement les solutions maximales de (E_3) et de (E_2) avec $a = 1$ et $a = 2$.

(c) (1 point) En déduire l'intervalle maximal des solutions strictement positives de (E_3).

(d) (1 point) En déduire l'allure de la courbe quand t tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (40 minutes) (6 points)

1. (1 point) On considère l'équation différentielle

$$(E_4) \quad x'(t) = rx(t) - \frac{x(t)}{1 + x^2(t)},$$

pour tout $t \in I \subset I\!R$ et $r \in I\!R$ est une constante.

(a) (1 point) Définir l'intervalle I où les solutions existent.

(b) (1 point) Trouver les équilibres x^* de l'équation (E_4) en fonction de r.

(c) (1 point) Déterminer leur nature (stabilité) en fonction de r.

(d) (1 point) Déduire des questions précédentes un diagramme de bifurcation qui sera dessiné avec le plus grand soin.

(e) (1 point) Identifier les types de bifurcation.

(f) (1 point) Dessiner avec le plus grand soin quelques trajectoires représentatives (suivant des valeurs significatives de r) des solutions de (E_4).

2. (BONUS : + 3 points) Mêmes questions pour l'équation différentielle

$$(E_5) \quad x'(t) = rx(t) - \frac{x(t)}{1 + x(t)},$$

en remplaçant (E_4) par (E_5).