Laurent PUJO-MENJOUET
pas de t

Bâtiment BRACONNIER - DOUA - 246

pujo@math.univ-lyon1.fr

Introduction sur les suites

I Définition générale

Définition : on appelle SUITE toute fonction

entiers naturels : 0, 1, 2, ...

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

réels

$$n \mapsto u_n$$

Le nombre u_n est appelé TERME GENERAL de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ATTENTION ! ne pas confondre u_n : UN NOMBRE

et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite (fonction)

par conséquent, il ne faut PAS écrire ~~u_n~~ est CROISSANTE mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Il existe 2 façons de décrire les suites

① **FORMULATION EXPLICITE** : $u_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$

② **FORMULATION PAR RÉCURRENCE** $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = a \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$ donné

Remarque : avantage majeur de la formulation explicite : pour calculer u_{500} on a juste à poser $u_{500} = f(500) \longrightarrow$ résultat immédiat tandis que pour la formulation par récurrence, pour calculer u_{500} il faut déterminer u_{499}, pour avoir u_{499} il faut calculer u_{498} etc...

II Représentation graphique des suites

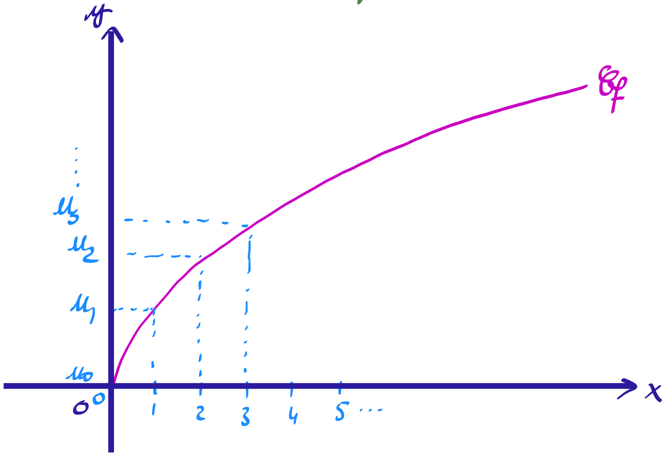
Il existe 2 façons de les représenter selon qu'elles sont formulées de façon explicite ou par récurrence.

Exemple : ① FORMULATION EXPLICITE

On considère la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \sqrt{n}$ $(u_n = f(n))$

Cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, (car $n \geq 0$)



Remarque : dans le cas de la formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(u_n = f(n))$

- si f est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- si f " décroissante " " " décroissante
- si f est constante " " stationnaire

② FORMULATION PAR RÉCURRENCE

On considère $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

et on définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n} \\ u_0 = 4 \end{cases}$

ⓐ Est-ce que la suite est bien définie ? Est que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$

Pour ça, on le montre par récurrence : on montre que :

P_n = " $u_n \geq 0$ " est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

(i) **Initialisation** : P_0 vraie ? P_0 : $u_0 = 4 \geq 0$ vraie

(ii) **Hérédité** : On suppose P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, montrons
$(u_k \geq 0$

que P_{k+1} est vraie

que P_{k+1} est vraie
($u_{k+1} \geq 0$?)

racine d'un nombre positif

Comme P_k est vraie, on a $u_k \geq 0$ donc $u_{k+1} = \sqrt{u_k}$ existe et $u_{k+1} \geq 0$ càd P_{k+1} vraie

(iii) **Conclusion** P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$
($u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

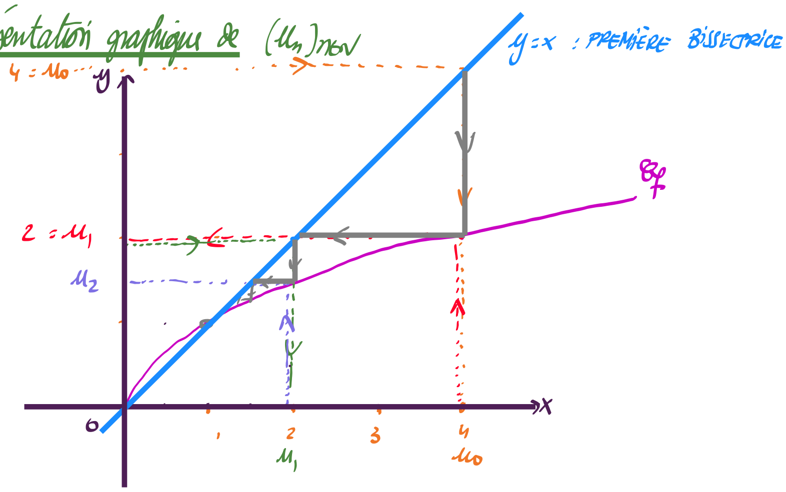
⑥ Représentation graphique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$u_{n+1} = f(u_n)$

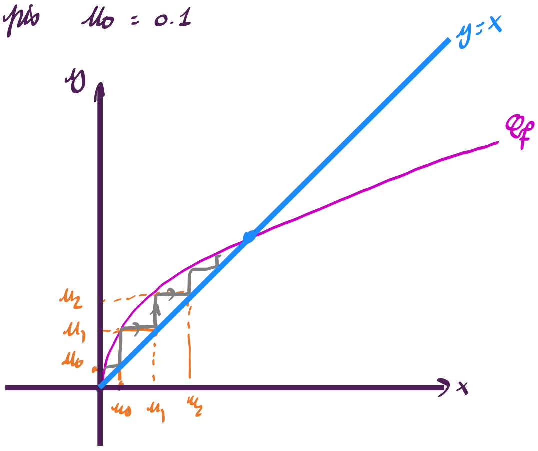
$u_0 = 4$

$u_1 = f(u_0) = \sqrt{u_0}$

$u_2 = f(u_1) = \sqrt{u_1}$



si on avait pris $u_0 = 0.1$



Remarque si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formulée par récurrence: c'est à dire $u_{n+1} = f(u_n)$

et si f est CROISSANTE

alors: ⓢⓘ en plus $u_0 < u_1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

ⓢⓘ $u_0 > u_1$ " " décroissante

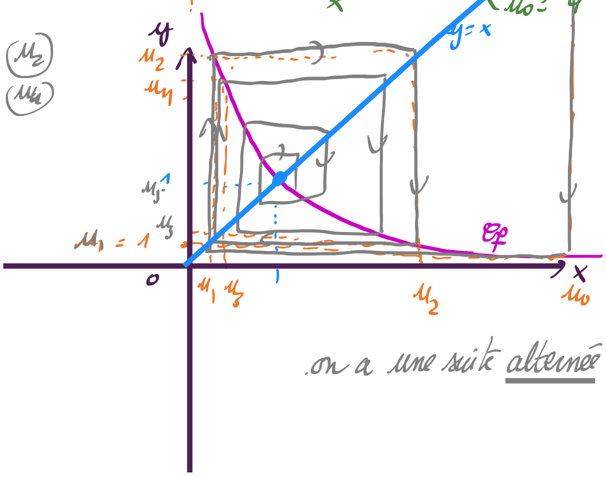
si $u_0 = u_1$: on est sur un point fixe (un point t.q. $f(x)=x$)

et si f est DÉCROISSANTE ?

Exemple : ⓤ₀ $4 = u_0$; On considère $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et u_n : $f(u_n) = \frac{1}{u_n}$

Exemple : On considère : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{u_n} \\ u_0 = 4 \end{cases}$

(u_2)
(u_4)



on a une suite <u>alternée</u>

$u_0 \downarrow u_2 \downarrow u_4$

$u_5 \uparrow u_3 \uparrow u_1$

III Trois suites classiques

a. Suite arithmétique

Définition On appelle suite arithmétique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre réel a (appelé raison) tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Exemple : $u_0 = 2$ et $a = 3$ $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Comment obtenir la formulation explicite ?

$u_0 = u_0$

$u_1 = u_0 + 1a$

$u_2 = u_1 + a = u_0 + 2a$

$u_3 = u_0 + 3a$

$\vdots$

$\boxed{u_n = u_0 + na} = f(n)$ où $f : x \mapsto u_0 + ax$

Montrons cette formule par récurrence : on note P_n : "$u_n = u_0 + na$"

① **Initialisation** : P_0 : $u_0 = u_0 + 0a = u_0$ vraie

② **Hérédité** On suppose P_k est vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$. Montrons que P_{k+1} est vraie (càd que $u_{k+1} = u_0 + (k+1)a$)

On sait que, par définition : $u_{k+1} = u_k + a$ or par l'hypothèse de récurrence P_k : $u_k = u_0 + ka$

donc $u_{k+1} = (u_0 + ka) + a = u_0 + (k+1)a$ donc P_{k+1} est vraie

③ Conclusion : $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Autrement dit $\boxed{u_n = u_0 + na}$

Question : que vaut $u_0 + u_1 + \dots + u_n$?

Question : que vaut $u_0+u_1+\dots+u_n$

$$u_0 = u_0$$
$$u_1 = u_0+a$$
$$u_2 = u_0+2a$$
$$u_3 = u_0+3a$$
$$\vdots$$
$$u_n = u_0+na$$

$$u_0+u_1+\dots+u_n = u_0+u_0+\underline{a}+u_0+\underline{2a}+u_0+\underline{3a}+\dots+u_0+\underline{na} = (n+1)u_0+(1+2+3+\dots+n)a$$

$$S = 1+2+3+\dots+n \qquad \text{GAUSS}$$
$$+\ S = n+(n-1)+(n-2)+\dots+1$$
$$2S = (n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1) = n(n+1) \quad \text{donc} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Par conséquent $u_0+u_1+u_2+\dots+u_n = (n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}a = (n+1)\left(u_0+\frac{na}{2}\right)$

$$= (n+1)\left(\frac{2u_0+na}{2}\right)$$
$$= (n+1)\left(\frac{u_0+u_0+na}{2}\right)$$

$$\boxed{u_0+\dots+u_n = (n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)}$$

6. Suites géométriques

Définition On appelle suite géometrique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe un nombre réel r, appelé raison tel que que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Exemple : si $u_0=2$ et $r=3$ $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Remarque : si $r=0$ la suite est stationnaire $(u_n=0)$ à partir de $n=1)$

si $r=1$ la suite est stationnaire $u_n=u_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Dans la suite on suppose $\boxed{r\neq 0 \text{ et } r\neq 1}$

Formulation explicite

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ u_1 &= r u_0 \\ u_2 &= r u_1 = r.r u_0 = r^2 u_0 \\ u_3 &= r^3 u_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\boxed{u_n = r^n u_0}$ on montrerait par recurrence que c'est vrai pour tout $n\in\mathbb{N}$

Que vaut la somme $u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$?

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ +u_1 &= ru_0 \\ +u_2 &= r^2u_0 \\ &\vdots \\ +u_n &= r^nu_0 \end{aligned}$$

$$u_0+u_1+\dots+u_n = u_0+ru_0+r^2u_0+\dots+r^nu_0 = u_0\left(\overset{r^0}{\overset{\shortparallel}{1}}+r+r^2+\dots+r^n\right)$$

Rappel que vaut $1+r+r^2+\dots+r^n$?

astuce : on multiplie cette somme par $1-r$:

on a alors
$$\begin{aligned}(1+r+r^2+\dots+r^n)(1-r) &= 1+r+r^2+\dots+r^n \\ &\quad -r-r^2-\dots-r^n-r^{n+1} \\ &= 1-r^{n+1}\end{aligned}$$

comme $r\neq 1$ on peut diviser par $1-r$ et on a

$$1+r+r^2+\dots+r^n = \boxed{\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}$$

Conclusion : $\boxed{u_0+u_1+\dots+u_n = u_0\cdot\frac{1-r^{n+1}}{1-r}}$

Ⓒ Suites arithmético - géometriques

Définition On appelle suite arithmético-geometique, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe 2 nombres réels a et r, apelés raison, tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = r u_n + a \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Remarques : ① si $\boxed{r=1}$ $u_{n+1} = u_n + a$: on a une suite arithmétique

② si $\boxed{a=0}$ $u_{n+1} = r u_n$: " " géométrique

On considère par la suite que $\boxed{r \neq 1 \text{ et } a \neq 0}$

Question : comment obtient-on une formulation explicite pour de telles suites ?

Par la méthode suivante :

étape 1 : On pose $f : x \mapsto rx + a$ et on cherche un réel l tel que $f(l) = l$ (recherche d'un point fixe)

$f(l) = l \iff rl + a = l$

$\iff rl - l = -a$

$\iff l(r-1) = -a$

$\iff \boxed{l = \frac{-a}{r-1}}$

étape 2 : suite auxiliaire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - l$

Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison r

Calculons v_{n+1} : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - l$

$= r u_n + a - l$ mais $u_n = v_n + l$

donc $v_{n+1} = r(v_n + l) + a - l$

$= r v_n + rl + a - l$

$= r v_n + l(r-1) + a$ mais $l = \frac{-a}{r-1}$ donc $l(r-1) = \frac{-a}{r-1}.(r-1) = -a$

$= r v_n - a + a$

ainsi $\boxed{v_{n+1} = r v_n}$ ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme $\boxed{v_0 = u_0 - l}$

étape 3 : formulation explicite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

D'après le cours précédent $v_n = v_0 . r^n = (u_0-\ell) r^n$

étape 4 : formulation explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme $v_n = u_n - \ell$ on a $u_n - \ell = (u_0-\ell) r^n$

donc $\boxed{u_n = (u_0-\ell) r^n + \ell}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

avec $\boxed{\ell = \frac{-a}{r-1}}$

Exercice : ① Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n+3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

de façon explicite

② Représenter cette suite sur un graphe

Solution : **étape 1** On pose $f : x \mapsto 2x+3$

et on cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(\ell)=\ell$

or $f(\ell) = \ell \iff 2\ell+3 = \ell$

$\iff 2\ell - \ell = -3$

$\iff \boxed{\ell = -3}$

étape 2 : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n+3$

Calculons v_{n+1} : $v_{n+1} = u_{n+1}+3$

$= 2u_n+3+3$

$= 2u_n+6$ or $u_n = v_n - 3$

Donc $v_{n+1} = 2(v_n-3)+6 = 2v_n - 6+6 = 2v_n$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et premier terme $v_0 = u_0 - \ell$

$= 1+3 = \boxed{4}$

étape 3 : On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$ $v_n = 4.2^n$

étape 4 : Comme $v_n = u_n+3$, alors $u_n+3 = 4.2^n$

étape 4 : Comme $v_n = u_n + 3$, alors $u_n + 3 = 4.2^n$

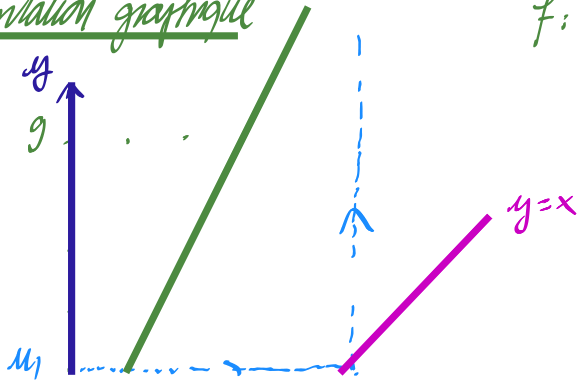
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 4.2^n - 3 = 2^2.2^n - 3 = \boxed{2^{n+2}-3}$

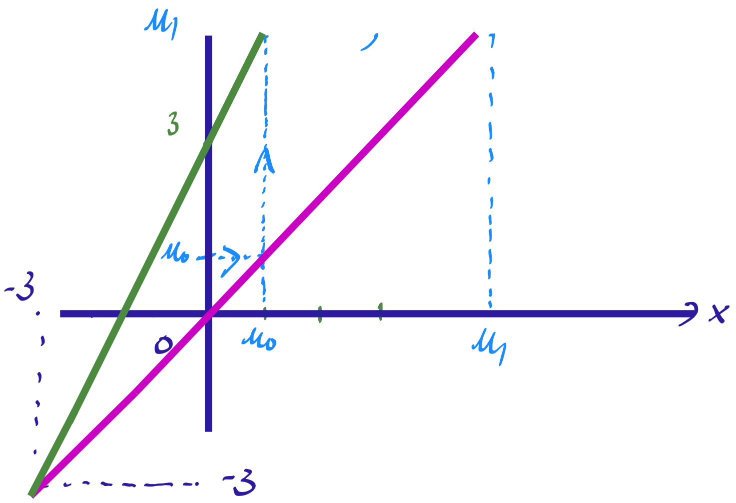
$g : x \mapsto 2^{x+2} - 3$

$e^{(x+2)\ln 2} - 3$

2. Représentation graphique

$f : x \mapsto 2x + 3$





III Suites récurrentes : généralités

III Suites récurrentes : généralités

Question : comment étudier une suite récurrente de façon générale ?
c'est à dire une suite de la forme :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases} \quad \text{où } f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

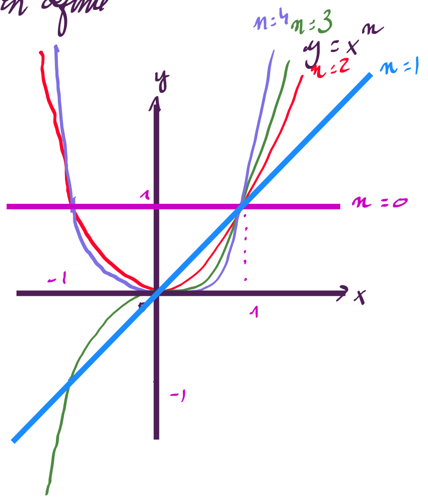
Le but est de savoir ① si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{D}_f$

② est-ce que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe

Exemple : Dans l'exercice précédent $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n+3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

On pose $f : x \mapsto 2x+3$ ici $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie



Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

On a vu que $u_n = 2^{n+2} - 3$

Rappel :

si $-1 < x < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

si $x = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1$

si $x \leq -1$ PAS DE LIMITE

Ici $u_n = 2^{n+2} - 3$

$\downarrow$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n+3} = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Proposition Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur I

et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ $(\ell \in \mathbb{R})$
alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$

(c'est à dire que si une suite récurrente converge, elle converge vers un de ses points fixes)

En effet :

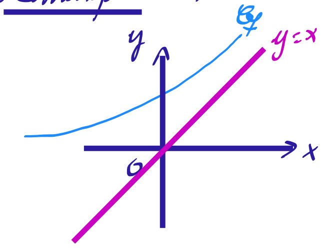
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] u_{n+1} \arrow[d, "n\to+\infty"'] & = & f(u_n) \arrow[d, "n\to+\infty"] \\ \ell & & \ell \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccl} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} & = & \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \\ \| & & \quad \big\downarrow \text{ car } f \text{ est } \underline{\text{continue}} \\ & = & f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

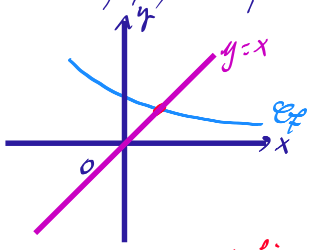
Remarque : bonne nouvelle, toutes les fonctions classiques sont continues sur

Remarque : bonne nouvelle, toutes les fonctions classiques sont continues sur leur domaine de définition.

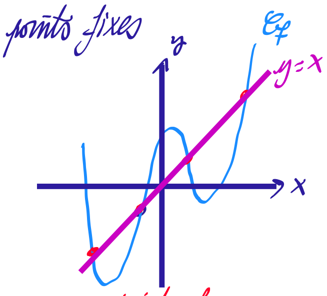
Remarque attention f peut avoir 0, 1, 2, .. ou plusieurs points fixes



aucun point fixe



un seul point fixe



4 points fixes

Plusieurs questions se posent alors :

① Combien la fonction f possède-t-elle de points fixes ?

② Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, vers quel point fixe converge-t-elle ?

③ Comment savoir si la suite converge ?

④ Comment représenter graphiquement la suite ?

Réponse à la question 4 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$

ⓐ Si f est croissante et si
- $u_0 < u_1$: alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- $u_0 > u_1$: " " décroissante

ⓑ si f est décroissante alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

Réponse à la question 1 : est-il possible de savoir si l'on a des points fixes ou non ?

ⓐ si on peut les trouver "à la main" (par le calcul) c'est mieux

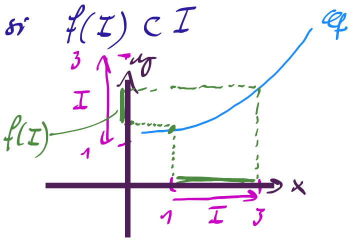
ⓑ sinon on a le résultat suivant

- STABILITÉ D'UN INTERVALLE

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathcal{D}_f$ (domaine de définition de f)

Définition on dit qu'un intervalle I est STABLE par f si $f(I) \subset I$

c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$



Remarque on a besoin de la stabilité pour 2 choses :

① ça aide à montrer qu'une suite est bien définie puisqu'on reste dans I

② On rétrécit à chaque fois le domaine et on a des chances de se diriger vers un point fixe

Théorème : lorsque I est un intervalle stable par f (càd $f(I) \subset I$) avec $I \subset D_f$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné dans } I \end{cases}$$

est une suite BIEN **DÉFINIE** (càd que tous les $u_n \in D_f$)

- **POINT FIXE**

Rappel : soit $f : I \to \mathbb{R}$, on dit que l est un point fixe de f si et seulement si $f(l) = l$

Théorème **EXISTENCE D'UN POINT FIXE**

Soient $I = [a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **continue** sur $[a,b] \subset D_f$

On suppose que $[a,b]$ est STABLE par f (càd que $f([a,b]) \subset [a,b]$)

(ou encore si $a \leq x \leq b$ alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$)

alors il existe **au moins** un point fixe de f dans $[a,b]$!!

Réponse à la question 3 : comment savoir si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Pour ça, on a un **résultat** : condition nécessaire de convergence

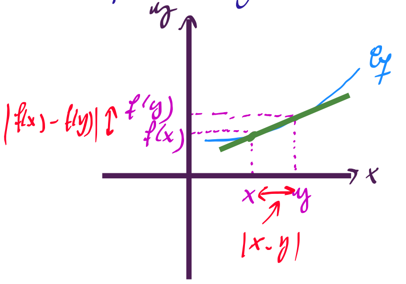
ⓐ FONCTION STRICTEMENT CONTRACTANTE

Définition : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \subset \emptyset$

Dire que f est strictement contractante sur I signifie qu'il existe nombre réel k $\boxed{< k < 1}$ tel que pour tous $x, y \in I$

un nombre réel k, avec $\boxed{0<k<1}$ tel que pour tous $x, y \in I$

$$|f(x)-f(y)| \leq k . |x-y|$$



Remarque $\quad |f(x)-f(y)| \leq k |x-y|$

si $x \neq y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq k < 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < \boxed{\frac{f(x)-f(y)}{x-y}} < 1 \longrightarrow$$ pente de la sécante à $\mathcal{C}_f$ en $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$

Rappel : $|a|<2$
$\Leftrightarrow -2<a<2$

et on rappelle que $\lim_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(y)$

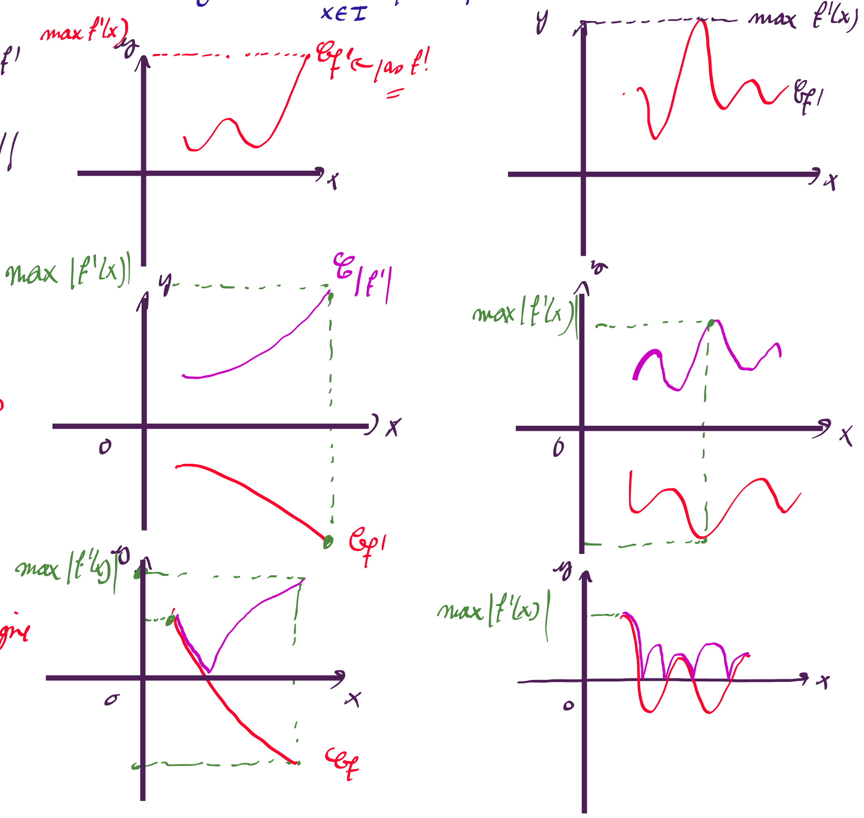
on a alors le résultat suivant :

Théorème $\quad$ théorème des fonctions strictement contractantes

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I \subset D_f$, avec f dérivable

si f' vérifie $\max_{x \in I} |f'(x)| = k < 1$ alors f est strictement contractante

si on trace f' ↗ attention pas f !!!



si $f'(x)>0$

si $f'(x)<0$

si $f'(x)$ change de signe

Exemple : est-ce que $f : x \mapsto x^2$ est STRICTEMENT CONTRACTANTE sur $[1,2]$?

attention : ne pas oublier les hypothèses du théorème

Solution **Ici** : , $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ donc $[1,2] \subset \mathcal{D}_f$

. f est dérivable sur $[1,2]$ car $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Calculons : $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)|$ et montrons que $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| \leq k < 1$

Ici $f'(x) = 2x$, or si $1 \leq x \leq 2$ $(x\in[1,2])$

alors $0 < 2 \leq 2x \leq 4$

↑ alors $f'(x) = 2x = |f'(x)|$ (car $2x>0$ si $x\in[1,2]$)

donc $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| = \max_{x\in[1,2]} f'(x) = 4 > 1$

donc f n'est pas strictement contractante sur $[1,2]$

Théorème : **Théorème du point fixe**

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $I \subset D_f$ telle que

① f est continue sur I

② I est stable par f (c.à.d $f(I) \subset I$)

par f (càd $f(I) \subset I$)

③ f est strictement contractante sur I (càd $\max_{x \in I} |f'(x)| \leq k < 1$)

alors f admet un UNIQUE point fixe l avec $l \in I$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$ converge vers ce point fixe l !!

On dit alors que l est attractif.

Questions ① Que se passe-t-il si on n'arrive pas à appliquer ce théorème (mais on arrive quand à trouver (à la main) des points fixes de f ?

② Comment savoir si ces points fixes sont attractifs ou répulsifs

② Comment savoir si ces points fixes sont attractifs ou repulsifs ?

Les reponses sont données dans le theorème suivant

Théorème · POINTS ATTRACTIFS - POINTS RÉPULSIFS

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $I \subset D_f$

soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in I \text{ donné} \end{cases}$

On suppose :

① f continue et dérivable sur I

② que l'on reussi à calculer la valeur exacte des points fixes ℓ

alors

ⓐ si $|f'(\ell)| < 1$ alors ℓ est attractif

ⓑ si $|f'(\ell)| > 1$ " ℓ est répulsif

ⓒ si $f'(\ell) = 1$: on calcule (si elle existe) $f''(\ell)$ et on a :

- ⓘ si $f''(\ell) \neq 0$ alors ℓ est (repulsif) INSTABLE
- ⓘⓘ si $f''(\ell) = 0$ alors on calcule $f'''(\ell)$ - on a
  - si $f'''(\ell) > 0$ alors ℓ est repulsif
  - si $f'''(\ell) < 0$ " ℓ est attractif
  - si $f'''(\ell) = 0 \to$ on calcule $f''''(\ell)$...

ⓓ si $f'(\ell) = -1$ on calcule

$-2\, f'''(\ell) - 3\, (f''(\ell))^2$ si < 0 ℓ est ATTRACTIF

> 0 ℓ est RÉPULSIF

$= 0$ ... on continue à explorer..

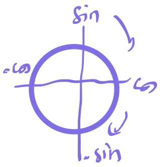
Exercice (examen 2021)

soit $f : x \longmapsto \frac{x+2}{x-5} + 1$

① $D_f = \{x \in \mathbb{R}, \text{ t.q. } x-5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{5\} =]-\infty, +5[\cup]5, +\infty[$

② **Expliquer pourquoi f est continue sur D_f**

f est continue sur D_f comme : quotient et somme de fonctions continues



③ On suppose $x \in [0,1]$

ⓐ Montrer que $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$

On a $f(x) = \frac{x+2}{x-5} + 1$ de la forme "$\frac{u}{v} + k$" dont la dérivée vaut "$\frac{u'v-uv'}{v^2} + 0$"

ici $u = x+2$ donc $u' = 1$

$v = x-5$ donc $v' = 1$

Par conséquent $f'(x) = \frac{1.(x-5)-(x+2).1}{(x-5)^2} = \frac{x-5-x-2}{(x-5)^2} = \frac{-7}{(x-5)^2}$

ⓑ Expliquer pourquoi f est décroissante sur $[0,1]$

sur $[0,1]$, $f'(x) = \frac{-7 \; <0}{(x-5)^2 \; >0} < 0$ donc f est décroissante sur $[0,1]$

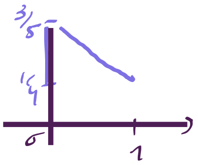
ⓒ **Calculer** $f(0)$ et $f(1)$ et en déduire que $[0,1]$ est stable par f

$f(0) = \frac{0+2}{} + 1 = \frac{-2}{5} + 1 = \frac{-2+5}{5}$ $\boxed{\frac{3}{\;}}$

$3/5$

$f(0) = \frac{0+2}{0-5} + 1 = \frac{-2}{5} + 1 = \frac{-2+5}{5} = \boxed{\frac{3}{5}}$

$f(1) = \frac{1+2}{1-5} + 1 = \frac{3}{-4} + 1 = \frac{-3}{4} + 1 = \frac{-3+4}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$



Comme f est decroissante sur $[0,1]$, et continue on a : $f([0,1]) = [f(1), f(0)]$

$= [\frac{1}{4}, \frac{3}{5}] \subset [0,1]$

(car $\frac{1}{4} > 0$ et $\frac{3}{5} < 1$)

donc $[0,1]$ est stable par f !!

ⓓ Monter que $f''(x) = \frac{14}{(x-5)^3}$

On sait que $f'(x) = \frac{-7}{(x-5)^2}$ de la forme "$\frac{u}{v}$" donc la dérivée est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u = -7$ donc $u' = 0$

et $v = (x-5)^2$ donc $v' = 2.(x-5)$

$u^2 \rightsquigarrow 2u.u'$

donc $f''(x) = \frac{0 + 7.2.(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{14.\cancel{(x-5)}}{(x-5)^3\cancel{(x-5)}} = \frac{14}{(x-5)^3}$

ⓔ Monter que f' est decroissante sur $[0,1]$

On a $f''(x) = \frac{14 > 0}{(x-5)^3}$ donc du signe de $(x-5)^3$, donc du signe de $x-5$

or $0 \leq x \leq 1$ donc $-5 \leq x-5 \leq 1-5 = -4 < 0$

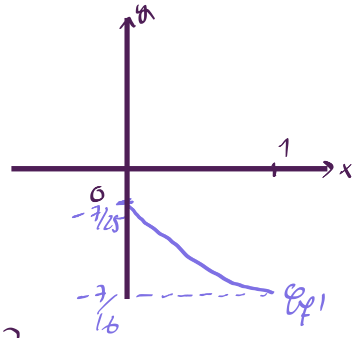
donc $x-5 < 0$ sur $[0,1]$

Par conséquent $f''(x) < 0$ sur $[0,1]$, ainsi f' est strictement decroissante sur $[0,1]$

f) Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$

$f'(0) = \frac{-7}{(-5)^2} = \frac{-7}{25} < 0$

$f'(1) = \frac{-7}{(1-5)^2} = \frac{-7}{(-4)^2} = \frac{-7}{16}$



(g) Monter que f est strictement contractante sur $[0,1]$

Pour ça il faut calculer $\max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ et montrer que c'est < 1.

comme f' est ↘ et negative sur $[0,1]$ $\max |f'(x)| = -f(1) = \frac{7}{16} < 1$

négative sur $[0,1]$ $\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| = -f(1) = \frac{7}{16} < 1$

donc f est strictement contractante sur $[0,1]$.

ⓔ Que peut-on en déduire sur un éventuel point fixe de f ?

Exercice (pour s'entraîner) → solution cours 2024

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \text{ donné} \end{cases}$ où $f : x \mapsto x^3 + x$

① f possède-t-elle des points fixes ? Si oui, lesquels ?

② Sont-ils attractifs ou répulsifs ?

Solution : ① Les points fixes vérifient $f(x) = x$

or $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x = x$

$\Leftrightarrow x^3 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 0}$ est le seul point fixe

② $f : x \mapsto x^3 + x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

donc $f'(x) = 3x^2 + 1$ au point fixe $x = 0$ on a $f'(0) = 3.0^2 + 1 = \boxed{1}$.

Calculons $f''(x) = 6x$ alors $f''(0) = 0$

Calculons $f'''(x) = 6 > 0$ donc 0 est répulsif