Université Claude Bernard, Lyon I
43, boulevard 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences, Technologies & Santé
Spécialité Mathématiques
L. Pujo-Menjouet
pujo@math.univ-lyon1.fr

Cours d'Analyse IV
Suites et Séries de fonctions

Préambule

Le but de ce cours est de généraliser la notion de somme finie de termes en étudiant comment cette dernière se comporte lorsque l'on considère une succession infinie de termes.
La clé sera de considérer ces sommes infinies, aussi appelées séries, comme la limite de suites. Autrement dit, quand on se souvient du cours sur les suites, il sera plus facile d'assimiler le cours sur les séries C'est pour cela que les deux premiers chapitres concernant des rappels ne doit pas être négligé.
Un des points clés de ce cours sera l'étude des séries de Fourier dont les applications sont assez nombreuses dans d'autres domaines des mathématiques (notamment les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles).
Pour arriver au chapitre concernant les séries de Fourier, il faudra cependant faire un petit chemin qui nous y amènera de façon moins abrupte. Comme nous l'avons écrit plus haut, nous rappellerons la structure de $\mathbb{R}$, puis la notion de suites dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous considèrerons ensuite les séries dans leur généralité, puis les suites et séries de fonction, pour ensuite passer aux séries entières, aux fonctions développables en séries entière et enfin les séries de Fourier. Nous pourrons alors résoudre quelques équations différentielles à l'aide de cette théorie.

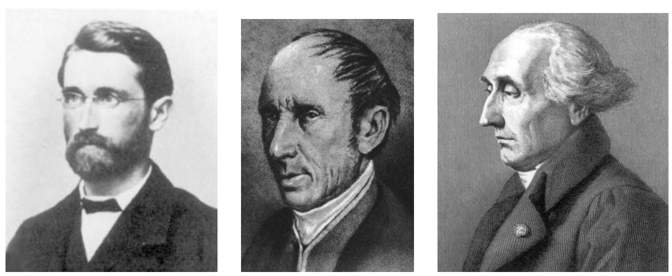
L'objectif de la deuxième partie du cours sera de résoudre des équations différentielles à l'aide des transformées de Laplace. Cet outil mathématique ne pourra s'appliquer rigoureusement sans un petit travail préliminaire sur les intégrales dépendant d'un paramètre.

Une fois ces concepts assimilés, vous serez en possession d'outils solides pour résoudre plusieurs types d'équations différentielles et équations aux dérivées partielles mais également des problèmes un peu plus théoriques.

Table des matières

Chapitre 1

Structure de $\mathbb{R}$, suites dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:



(a) Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916), mathématicien allemand, il est le premier à proposer une construction rigoureuse des nombres réels à partir des nombres rationnels.

(b) Augustin Louis (1789-1857), un mathématicien français, a proposé la première définition rigoureuse d'une limite d'une suite ainsi que plusieurs contributions fondamentales dans l'étude de la convergence des séries.

(c) Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813) un mathématicien italien, à l'origine semble-t-il de la notation indicielle des suites.

FIGURE 1.1 – Quelques mathématiciens célèbres liés aux réels et aux suites.

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$ se construit rigoureusement à partir de $\mathbb{N}$ (entiers naturels) en définissant $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs) puis $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels : de la forme p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$). Dans ce cours, on va simplement rappeler la différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

1.1 La crise des nombres chez les grecs

Pythagore considère un triangle isocèle rectangle de côté 1. Il remarque que le carré de l'hypoténuse vaut 2. Or il remarque qu'il n'existe pas de nombre dans $\mathbb{Q}$ dont le carré soit 2. Donc, si

les seuls nombres qu'on connaisse sont les rationnels, il y a des longueurs simples qui ne sont pas des nombres !
L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$ est défini à partir de $\mathbb{Q}$ en "rajoutant des nombres" pour éviter ce genre de problème.
Une des façons de "rajouter des nombres" est d'utiliser la notion de suite :

1.2 Suites et voisinages :

Commençons cette section par la définition des suites réelles.

Définition 1 (SUITES)

On appelle **suite** réelle toute **application** $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n \end{array}\right.$. On note une telle application $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque *On appellera aussi suite les applications dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.*

La notion la plus importante concernant les suites est celle de **convergence**. Pour définir la convergence, on définit la notion de **voisinage**. L'étude des voisinages est une branche des mathématiques appelée la **topologie** (voir cours d'Analyse III pour les bases, et le cours de Topologie élémentaire (Semestre 5) pour plus de détails). On peut définir des voisinages pour des objets autres que des nombres (des vecteurs, des fonctions, ...). Chaque fois qu'on peut définir des voisinages, on peut alors étudier des convergences, des continuités, des notions proches de la dérivabilité, et faire de **l'optimisation**.

Définition 2 (VOISINAGE)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage** de x si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset V$.

Remarque *On peut aussi dire, c'est équivalent, que $V \subset \mathbb{R}$ est un* **voisinage** *de x si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$.*

Définition 3 (VOISINAGE DE L'INFINI)

On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $[A, +\infty[\subset V$ (resp. $]-\infty, A] \subset V$).

La notion de voisinage étant en place, nous nous intéressons alors au comportement des suites quand n tend vers l'infini. Pour cela nous allons introduire les limites de suites.

1.3 Limites de suites

Définition 4 (LIMITE)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit l fini ou infini. On dit que l est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ si et seulement si pour tout V voisinage de l, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, $x_n \in V$.

Si une suite admet une limite **finie** on dit qu'elle **CONVERGE**. Si elle admet une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite, on dit qu'elle **DIVERGE**.

– Si l est $+\infty$, $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ signifie :

$$\text{pour tout } A \in \mathbb{R},\ \text{il existe } N_A \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_A \Rightarrow x_n \geq A.$$

– Si $l \in \mathbb{R}$, $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ signifie :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0,\ \text{il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow x_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$$

(c'est à dire $|x_n - l| \leq \varepsilon$).

Propriété 1 (COMPARAISON DES LIMITES)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = l_1$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = l_2$. Alors $l_1 \leq l_2$.

Remarque *Même si on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < y_n$, on ne peut pas en déduire que $l_1 < l_2$ (on a juste $l_1 \leq l_2$).*
Exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 0$ et $y_n = 1/n$.

Propriété 2 (THEOREME DES GENDARMES)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = l$ (l fini ou infini). Alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = l$.

Il existe une notion proche de celle de suite convergente, mais ne nécessitant pas de préciser la valeur de l.

Définition 5 (SUITE DE CAUCHY)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si et seulement si on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($n \geq N$ et $m \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

QUESTION IMPORTANTE : est-ce qu'être une suite de cauchy est la même chose qu'être une suite convergente ?

Propriété 3

Si une suite est convergente, alors elle est de Cauchy.

Preuve *Démontré en cours.*

Remarque ***ATTENTION*** *: la réciproque n'est pas vraie en général. Par contre, le fait de travailler sur un espace où la réciproque est vraie serait bien pratique. En effet nous pourrions montrer la convergence d'une suite sans avoir à calculer la limite de cette suite. Les espaces dont la réciproque de la propriété ci-dessus.*

Définition 6 (ENSEMBLE COMPLET)

Si dans un ensemble toute suite de Cauchy est convergente, on dit que cet ensemble est complet

Exemple *$\mathbb{Q}$ n'est pas complet.*
En effet, considérons la suite définie par $x_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = (1/2)(x_n + 2/x_n)$. Tous les x_n sont bien dans $\mathbb{Q}$ et on montrera (en TD) que cette suite est de Cauchy. Or, si sa limite est l, alors $l = (1/2)(l + 2/l)$, c'est à dire $l^2 = 2$ donc l n'existe pas dans $\mathbb{Q}$!

On peut maintenant dire ce qu'est $\mathbb{R}$:
$\mathbb{R}$ est le **complété** de $\mathbb{Q}$:
c'est $\mathbb{Q}$ "auquel on rajoute toutes les limites des suites de Cauchy". (Cette phrase ne constitue bien sûr pas une construction rigoureuse de $\mathbb{R}$).
Mais ce n'est pas la seule façon de construire $\mathbb{R}$. Il en existe deux autres équivalentes. L'une d'elle permet de définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ par la notion de **borne sup** qui est l'objet de la section suivante.

1.4 Borne sup ou inf, max ou min

Définition 7 (BORNE SUP, BORNE INF)

Soit $E \subset \mathbb{R}$. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est **la borne supérieure** de E ($M = \sup(E)$) si et seulement si

1. M est un **majorant** de E (pour tout $x \in E$, $x \leq M$),
2. si M' est un majorant de E, alors $M \leq M'$.

De même $m \in \mathbb{R}$ est **la borne inférieure** de E ($m = \inf(E)$) si et seulement si

1. m est un **minorant** de E (pour tout $x \in E$, $x \geq m$),
2. si m' est un minorant de E, alors $m \geq m'$.

Propriété 4 (MAJORANT ET SUITES)

$$M = \sup(E)$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} -M \text{ est un majorant de } E, \\ \\ -\text{il existe } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suite d'éléments de } E \text{ telle que} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M. \end{cases}$$

La propriété correspondante pour la borne inf est vraie.

Définition 8 (MAXIMUM, MINIMUM)

Soit $E \subset \mathbb{R}$.
On dit que M est le **maximum** de E ($M = \max(E)$) si $M = \sup(E)$ et $M \in E$.
On dit que m est le **minimum** de E ($m = \min(E)$) si $m = \inf(E)$ et $m \in E$.

On peut maintenant décrire la deuxième façon de construire $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ correspond à $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute "toutes les bornes sup de sous-ensembles de $\mathbb{Q}$".
On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 5 (PROPRIETE DE LA BORNE SUP)

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne sup.

Propriété 6 (REEL ET BORNE SUP)

Tout réel est la borne sup d'un ensemble d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Remarque *$\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne sup : $\{x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 < 2\}$ admet $\sqrt{2}$ comme borne sup dans $\mathbb{R}$ et n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$.*

Enfin, la troisième façon de construire $\mathbb{R}$ utilise les suites croissantes et majorées : $\mathbb{R}$ sera alors $\mathbb{Q}$ auquel on rajoute "toutes les limites de suites croissantes et majorées de $\mathbb{Q}$". On a alors :

Propriété 7 (SUITE CROISSANTE MAJOREE)

Toute suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$).

Remarque *Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$.*

1.5 Suites adjacentes

Définition 9 (SUITES ADJACENTES)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. On dit qu'elles sont **adjacentes** si et seulement si

1. l'une des suites est croissante,
2. l'autre suite est décroissante,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$.

Propriété 8 (LIMITES ET SUITES ADJACENTES)

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles adjacentes telles que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante alors :

1. pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2, x_n \leq y_m$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ existent, sont finies et sont égales.

Preuve *Démontré en cours.*

Chapitre 2

Rappels suites complexes, limsup de suites réelles

2.1 Suites complexes

Il n'existe pas $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$ (ou $x^2+1=0$). Si on veut que tout polynôme de degré 2 ait 2 racines, on introduit le nombre imaginaire i qui vérifie $i^2 = -1$. On définit alors les **nombres complexes** comme la somme d'une **partie réelle** et d'une **partie imaginaire** :

$$\mathbb{C} = \{a + ib,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{C}$ est donc très similaire à $\mathbb{R}^2 = \{(a,b),\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$. La différence est qu'on définit un produit $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ alors qu'on ne le fait pas sur $\mathbb{R}^2$ (il existe un produit scalaire $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mais c'est différent).

Un des intérêts principaux des nombres complexes est leur formulation **module-argument** :

Propriété 1 (MODULE ET ARGUMENT)

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a alors $a = \rho\cos(\theta)$, $b = \rho\sin(\theta)$ et $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$.

Alors si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = e^{i\theta'}$, on a $zz' = \rho e^{i(\theta+\theta')}$. Donc une multiplication par un nombre complexe de module 1 correspond à une **rotation**. C'est à cause de cet effet qu'on utilise les nombres complexes pour modéliser les phénomènes oscillants.

Définition 1 (SUITE COMPLEXE)

Une suite complexe est une application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & z_n. \end{array}\right.$

Pour définir la convergence des suites complexes, on définit les voisinages dans $\mathbb{C}$.

Définition 2 (VOISINAGE)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $V \subset \mathbb{C}$ est un **voisinage** de z si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(z, \varepsilon) = \{z' \in \mathbb{C}$ tq $|z - z'| \leq \varepsilon\} \subset V$.

Remarque *On peut aussi prendre* $\overset{o}{D}(z, \varepsilon) = \{z' \in \mathbb{C}$ *tq* $|z - z'| < \varepsilon\}$.

La définition de limite de suite dans $\mathbb{C}$ est alors la même que dans $\mathbb{R}$.

Définition 3 (LIMITE D'UNE SUITE)

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et soit $l \in \mathbb{C}$. On dit que l est la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ si et seulement si pour tout V voisinage de l, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, $z_n \in V$.

Remarque

1. $l = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ *signifie donc pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - l| \leq \varepsilon \text{ (c'est à dire } z_n \in \overline{D}(l, \varepsilon)).$$

2. *Dans* $\mathbb{R}$ *on définit des voisinages de* $+\infty$ *et* $-\infty$*, ce qui permet de définir des limites infinies. Dans* $\mathbb{C}$ *on ne le fait pas : une limite infinie dans* $\mathbb{C}$ *n'a aucun sens !*

Comme dans $\mathbb{R}$, on définit les suites de Cauchy.

Définition 4 (SUITE DE CAUCHY)

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si et seulement si on a : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n \geq N_\varepsilon \text{ et } m \geq N_\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_m| \leq \varepsilon.$$

Comme dans $\mathbb{R}$, on a alors :

Propriété 2 ($\mathbb{C}$ EST COMPLET)

Dans $\mathbb{C}$, toute suite de Cauchy est convergente. Autrement dit $\mathbb{C}$ est **complet**.

Pour le démontrer, on décompose la suite complexe en sa partie réelle et sa partie imaginaire. On a :

Propriété 3 (CONVERGENCE (CAUCHY))

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{C}$),
- $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy (dans $\mathbb{R}$),
- $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (dans $\mathbb{R}$),
- $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{C}$).

Lorsqu'on utilise la formulation module-argument :

Propriété 4 (LIMITE, MODULE ET ARGUMENT)

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \text{ (limite dans } \mathbb{C}) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |l| \text{ (limite dans } \mathbb{R}).$$

Remarque ***ATTENTION :*** *LA RECIPROQUE N'EST PAS VRAIE. Il n'y a que deux cas où l'étude du module permet de conclure sur la convergence de la suite :*
- *si* $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

– *si* $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$ *alors* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*

DIFFERENCE FONDAMENTALE ENTRE $\mathbb{R}$ ET $\mathbb{C}$: il n'y a pas de relation d'ordre (similaire à $\leq$) dans $\mathbb{C}$ (ni dans $\mathbb{R}^2$: de façon générale, on peut ordonner des nombres réels mais pas des vecteurs). Donc pas de notion de suite croissante, de majoration, de théorème des gendarmes, de limsup et liminf !

2.2 Limite sup et inf

ATTENTION, nous ne considèrerons ici que les suites réelles. La relation d'ordre $\leq$ de $\mathbb{R}$ permet de définir la limsup et la liminf d'une suite réelle. L'intérêt est que la limsup et la liminf existent toujours, dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, contrairement à la limite.

Définition 5 (LIMSUP, LIMINF)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Par définition, $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} x_k$ et $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} x_k$.

Remarque

1.Cette définition s'étend aux suites non nécessairement bornées, en posant

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ si la suite n'est pas majorée,}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = -\infty \text{ si la suite n'est pas minorée.}$$

2. La suite $(\sup_{k\geq n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant décroissante, elle admet toujours une limite dans* $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. *De même, la suite* $(\inf_{k\geq n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant croissante, elle admet toujours une limite dans* $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Il est commode de relier la limsup et la liminf d'une suite à ses valeurs d'adhérence.

Définition 6 (VALEUR D'ADHERENCE)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement s'il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a.

On a alors :

Propriété 5 (LIMSUP, LIMINF ET ADHERENCE)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Sa limite supérieure est la plus grande de ses valeurs d'adhérence, et sa limite inférieure est la plus petite.

On en déduit :

Propriété 6 (CONVERGENCE)

Une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si et seulement si $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = l$.

Chapitre 3

Séries dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Nous sommes désormais en mesure de définir la notion de série. Nous allons voir que sa définition repose sur la notion de suite. Les deux sont donc extrêmement liés, et il ne faudra jamais perdre cet aspect de vue.

Définition 1 (SERIE)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On appelle **série** de terme général x_n et on note $\sum x_n$, la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

On dit que la série $\sum x_n$ converge (resp. diverge) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). Si la série converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ et est appelée la **somme** de la série.

Exemple (SERIE GEOMETRIQUE) *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.*
Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ *et comme,* $\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$ *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1}{1-z}$.
La série $\sum z^n$ est donc convergente et sa somme est $\dfrac{1}{1-z}$.

Propriété 1 (SOMMES DE SERIES)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$.
2. Si $\lambda \neq 0$, si $\sum x_n$ diverge et $\sum y_n$ converge alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ diverge.

Remarque *Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ divergent, on peut avoir quand même $\sum(x_n + y_n)$ qui converge.*
Exemple : si $x_n = -y_n$.

3.1 Premiers critères de convergence

Propriété 2 (CRITERE DE CAUCHY POUR LES SERIES)

Une série réelle ou complexe $\sum x_n$ converge si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \leq \varepsilon$.

Preuve
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ est une suite réelle ou complexe. Donc elle converge si et seulement si elle est de Cauchy. Et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon$.
Ou encore si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($m > n \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon$. □

Remarque ***IMPORTANT :*** *d'après la propriété précédente, si $\sum x_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.*
Du coup, si $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$, on dit que $\sum x_n$ est **grossièrement divergente**.

Preuve *Démontré en cours.*

Définition 2 (CONVERGENCE ABSOLUE)

On dit que la série (réelle ou complexe) $\sum x_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série (réelle) $\sum |x_n|$ est convergente.

Propriété 3 (CONVERGENCE ABSOLUE ET CONVERGENCE)

Une série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

Preuve

Si $\sum x_n$ est absolument convergente alors $\sum |x_n|$ est convergente et vérifie donc le critère de Cauchy :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $m > n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \right| = \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \varepsilon$. Or $\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|$. Donc $\sum x_n$ vérifie le critère de Cauchy. Elle est donc convergente. $\square$

3.2 Séries réelles à termes positifs

Propriété 4 (COMPARAISON)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles **à termes positifs** telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Alors

- i) si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge,
- ii) si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge.

Preuve

- *i) Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$.*
  Si $\sum y_n$ converge, notons $T = \lim_{n \to +\infty} T_n$. Comme $\sum y_n$ est à termes positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$. De plus, comme $\sum x_n$ est à termes positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par T, elle est convergente.
- *ii) Si $\sum x_n$ diverge, puisqu'elle est à termes positifs, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.* $\square$

Définition 3 (EQUIVALENCE)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On dit qu'elles sont **équivalentes** à l'infini et on note $x_n \sim_{+\infty} y_n$ si et seulement si pour n assez grand, $x_n = y_n(1 + \varepsilon(n))$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Propriété 5 (SERIES ET EQUIVALENTS)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles **à termes positifs** telles que $x_n \sim_{+\infty} y_n$. Alors $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Preuve
Si $x_n \sim_{+\infty} y_n$, alors pour n assez grand, $x_n = y_n(1+\varepsilon(n))$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Pour n assez grand,
$-1/2 \leq \varepsilon(n) \leq 1/2$ donc $y_n/2 \leq y_n(1+\varepsilon(n)) = x_n \leq 3y_n/2$.
Puisque pour n assez grand $y_n/2 \leq x_n$, si $\sum x_n$ converge alors $\sum y_n$ converge et si $\sum y_n$ diverge alors $\sum x_n$ diverge.
Puisque pour n assez grand $x_n \leq 3y_n/2$, si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge et si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge.
Ces comparaisons ne sont valables que parce que $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont **à termes positifs**. $\square$

Définition 4 (NEGLIGEABILITE)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini et on note $x_n =_{+\infty} o(y_n)$ si et seulement si pour n assez grand, $x_n = y_n\varepsilon(n)$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Propriété 6 (SERIES ET NEGLIGEABILITE)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles telles que $x_n =_{+\infty} o(y_n)$. On suppose que $\sum y_n$ est **à termes positifs** et qu'elle converge. Alors $\sum x_n$ est aussi convergente.

Propriété 7 (SERIE DE RIEMANN)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum 1/n^\alpha$ converge et si $\alpha \leq 1$ alors elle diverge.

Preuve
Cette propriété sera démontrée par comparaison d'une série et d'une intégrale en dessous.

Propriété 8 (COMPARAISON AVEC LES SERIES DE RIEMANN)

Soit $\sum x_n$ une série réelle **à termes positifs**.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha x_n \leq 1$, alors $\sum x_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\alpha x_n \geq 1$, alors $\sum x_n$ diverge.

Preuve
La preuve est une simple application de la proposition précédente et du principe de comparaison des séries à termes positifs.

Les deux propriétés suivantes (règle de Cauchy et règle de D'Alembert) consistent à comparer une série à termes positifs avec une série géométrique. La façon la plus simple de les énoncer est d'utiliser les limsup et liminf :

Propriété 9 (REGLE DE CAUCHY)

Soit $\sum x_n$ une série réelle à termes positifs. Notons $l = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Alors
- i) Si $l < 1$, $\sum x_n$ converge,
- ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,
- iii) si $l = 1$, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de Cauchy.

Propriété 10 (REGLE DE D'ALEMBERT)

Soit $\sum x_n$ une série réelle à termes strictement positifs. Notons $L = \limsup_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ et $l = \liminf_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Alors
- i) Si $L < 1$, $\sum x_n$ converge,
- ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,
- iii) si $l \leq 1 \leq L$, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de D'Alembert.

Remarque *Lorsque $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe, on a $L = l$ et la règle de D'Alembert est alors très similaire à la règle de Cauchy :*
- *i) Si $l < 1$, $\sum x_n$ converge,*
- *ii) si $l > 1$, $\sum x_n$ diverge,*
- *iii) si $l = 1$, cas douteux.*

Remarque ***LIEN ENTRE LES REGLES DE CAUCHY ET DE D'ALEMBERT :***
- *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe, alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existe et $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$. Donc il est inutile d'essayer la règle de Cauchy si la règle de D'Alembert a donné $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$.*
- *Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ n'existe pas, il est possible que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ existe quand même, et il est possible qu'on ne soit pas dans le cas douteux de la règle de Cauchy, même si on est dans le cas douteux de celle de D'Alembert.*

3.3 Comparaison d'une série et d'une intégrale impropre

Rappelons ici la définition d'une intégrale impropre. Nous y reviendrons plus tard dans le chapitre consacré aux intégrales.

Définition 5 (INTEGRALE IMPROPRE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné inclus dans $[a, +\infty[$. Si $\lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$ existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, et on note $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)dx$. Sinon, on dit que l'intégrale impropre diverge.

Propriété 11 (COMPARAISON SERIE ET INTEGRALE IMPROPRE)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné inclus dans $[a, +\infty[$, **décroissante** et **positive**. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Preuve

Comme f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n, n+1]$,
$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$,
donc $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$.
C'est à dire $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$. Or

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{X \to +\infty X \in \mathbb{N}} \int_a^X f(x)dx \\ &= \lim_{X \to +\infty X \in \mathbb{N}} \left(\int_a^{E(a)+1} f(x)dx + \sum_{n=E(a)+1}^{X-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \right).\end{aligned}$$

Donc, puisque $\int_n^{n+1} f(x)dx \leq$ $f(n)$, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge,
c'est à dire $\sum \int_n^{n+1} f(x)dx$ diverge, alors $\sum f(n)$ diverge, et si $\sum f(n)$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
De même, puisque $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx$, si $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum f(n+1)$ converge et donc $\sum f(n)$ converge, et si $\sum f(n)$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge. $\square$

Exemple $\sum 1/n^\alpha$, $\alpha > 0$:

– *Si* $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X =$
$\begin{cases} \dfrac{-1}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha > 1, \\ +\infty, \text{ si } \alpha < 1. \end{cases}$

– *Si* $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{X\to+\infty} [\ln(x)]_1^X = +\infty.$

Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Propriété 12 (ENCADREMENT DU RESTE)

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive et décroissante, telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge. Notons pour $n \geq a$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.
Alors, pour tout $n \geq a$,
$\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx.$

Remarque *Pour toute série réelle ou complexe* $\sum x_n$ *convergente, la quantité* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$ *est appelée* **reste d'ordre** n *de* $\sum x_n$*, et on a* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

3.4 Séries à termes quelconques

Définition 6 (SERIE SEMI-CONVERGENTE)

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est **semi-convergente**.

Définition 7 (SERIE ALTERNEE)

Une série **réelle** $\sum x_n$ est dite **alternée** si et seulement si $(-1)^n x_n$ garde un signe constant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 13 (REGLE DES SERIES ALTERNEES)

Pour qu'une série alternée $\sum x_n$ converge, il suffit que la **suite** $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et tende vers 0. De plus, dans ce cas, le reste d'ordre n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$, vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |x_{n+1}|$.

Exemple

$\sum(-1)^n/n$ est convergente mais pas absolument convergente (donc elle est semi-convergente). Cette série est appelée série harmonique alternée. On peut montrer en appliquant Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$$

Propriété 14 (REGLE D'ABEL)

Soit $\sum x_n$ une série complexe où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha_n u_n$ tels que
- i) la **suite** $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante et tend vers 0,
- ii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$.

Alors $\sum x_n$ est convergente.

Exemple

Pour $\alpha > 0$ et $\theta \neq 0$ $[2\pi]$, la série $\sum \exp(in\theta)/n^\alpha$ converge.
En effet : $1/n^\alpha$ joue le rôle de α_n, $(1/n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, décroissante et qui tend vers 0.
$\exp(in\theta)$ joue le rôle de u_n,
$\left|\sum_{k=0}^{n} \exp(ik\theta)\right| = \left|\frac{1-\exp(i(n+1)\theta)}{1-\exp(i\theta)}\right| \leq \frac{2}{|1-\exp(i\theta)|}$.
Or $\frac{2}{|1-\exp(i\theta)|}$ est indépendant de n, donc la règle d'Abel s'applique.

3.5 Sommation par paquets, produit

On peut remplacer des "paquets" de termes **consécutifs** par leur somme effectuée :

Propriété 15 (COMPARAISON DE SERIES)

Soit $n \mapsto \varphi(n)$ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Soit $\sum x_n$ une série complexe. On considère la série $\sum y_n$ où $y_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} x_k$ alors

- i) Pour que $\sum x_n$ converge , il est **nécessaire** que $\sum y_n$ converge. De plus, si c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$.
- ii) Si les x_n sont des **réels positifs**, pour que $\sum x_n$ converge, il est nécessaire **et suffisant** que $\sum y_n$ converge.

Définition 8 (PERMUTATION)

On appelle **permutation** de $\mathbb{N}$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Définition 9 (SERIE COMMUTATIVEMENT CONVERGENTE)

On dit qu'une série $\sum x_n$ est **commutativement convergente** si et seulement si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente.

Propriété 16 (COMMUTAT. ET ABS. CONVERGENTE)

Une série complexe est commutativement convergente si et seulement si elle est absolument convergente. Dans ce cas, sa somme ne change pas si on change l'ordre des termes.

Remarque

Cette propriété implique que pour toute série complexe semi-convergente, on peut trouver une permutation des termes qui donne une série divergente. On peut aussi démontrer que pour toute série complexe semi-convergente, pour tout nombre complexe fixé à l'avance, on peut trouver une permutation des termes qui donne une série dont la somme est ce nombre.

Exemple *à partir de la série harmonique alternée*

$$\sum_{n\geq 1} x_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2),$$

on construit la série

$$\sum_{n\geq 1} y_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \ldots$$

Puis, par sommation par paquets, on considère

$$\sum_{n\geq 1} z_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)}\right) - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots =$$
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Or si $\sum y_n$ *converge alors* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} y_n = \sum_{n\geq 1} z_n = \frac{1}{2}\ln(2)$. *Donc* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} y_n \neq \sum_{n\geq 1} x_n$. □

Définition 10 (SERIE PRODUIT)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries complexes. On appelle série produit de $\sum x_n$ et $\sum y_n$ la série $\sum z_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle z_n = \sum_{p+q=n} x_p y_q = \sum_{p=0}^{n} x_p y_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} x_{n-q} y_q$.

Propriété 17 (CONVERGENCE SERIE PRODUIT)

Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Alors la série produit $\sum z_n$ de $\sum x_n$ et $\sum y_n$ est absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$.

Remarque *Cette propriété ne s'étend pas aux séries semi-convergentes.*

Exemple

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^{1/4}}$.

Les séries $\sum x_n$ *et* $\sum y_n$ *sont alternées et convergentes.*

Elles ne sont pas absolument convergentes car $|x_n| = \dfrac{1}{(n+1)^{1/4}}$ *donc* $\sum |x_n|$ *est de même nature que* $\sum 1/n^{1/4}$,

(car $(n+1)^{1/4} \sim_{+\infty} n^{1/4}$*) qui est une série de Riemann divergente.*

La série produit est $\sum z_n$ *avec* $\displaystyle z_n = (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+1)^{1/4}} \frac{1}{(q+1)^{1/4}}$.

Or pour tout $p \leq n$, $(p+1)^{1/4} \leq (n+1)^{1/4}$ *donc pour tout* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $p+q=n$, $\dfrac{1}{(p+1)^{1/4}(q+1)^{1/4}} \geq \dfrac{1}{(n+1)^{1/2}}$.

Donc $\displaystyle |z_n| \geq \sum_{p+q=n} \frac{1}{(n+1)^{1/2}} = \frac{(n+1)}{(n+1)^{1/2}} = (n+1)^{1/2}$. *Donc* $\sum z_n$ *est grossièrement divergente.*

□

Chapitre 4

Suites de fonctions

Dans les parties suivantes, on va considérer des fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. La **continuité**, la limite **finie** quand z tend vers z_0 (z_0 **fini**) et la **dérivabilité** de telles fonctions se définissent comme pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mais le module remplace la valeur absolue). On ne définit pas de limite infinie, ni de limite quand z tend vers l'infini. Les fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dérivables sont dites **holomorphes** et ont des propriétés bien plus fortes que les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. Leur étude ne commence qu'en L3 de mathématiques.

Remarque

Dans $\mathbb{R}$, la définition de la dérivée fait intervenir le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Elle implique donc de pouvoir diviser par $(x-x_0)$. Dans $\mathbb{C}$, ça a un sens, la division par un nombre complexe est bien définie. Dans $\mathbb{R}^2$ ça n'en a pas, la division par un vecteur n'est pas définie. Pour cette raison, on peut définir la dérivée d'une fonction $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mais pas d'une fonction $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Pour ces dernières, on introduit une notion plus sophistiquée, la **différentiabilité***. L'étude de la différentiabilité se voit en ANALYSE III.*

Comme il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$, il n'y a pas de théorème de Rolle, et pas d'égalité des accroissements finis. Mais on peut quand même démontrer une **inégalité des accroissements finis** :

Théorème 1 (INEGALITE DES ACCROISSEMENTS FINIS)

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe sur D, de dérivée f' et $(z_0, z) \in D^2$ tels que $[z_0, z] \in D$, alors $|f(z) - f(z_0)| \leq |z - z_0| \sup_{t \in [z_0, z]} |f'(t)|$.

Remarque *$t \in [z_0, z]$ signifie il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $t = z_0 + \alpha(z - z_0)$.*

Définition 1 (CONVERGENCE SIMPLE)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le même domaine D : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** vers f **sur** D ssi pour tout $z \in D$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z) = f(z)$ (limite dans $\mathbb{C}$).

Remarque *Cette définition est aussi valable pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Exemple

On considère $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers f où $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,1[, \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{cases} \end{cases}$

On remarque que dans cet exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue mais que f est discontinue en 1.

Définition 2 (CONVERGENCE UNIFORME)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f **sur** D si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0.$$

Remarque

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D se traduit par :

$$\text{pour tout} z \in D, \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} N_{z,\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

$$n \geq N_{z,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D se traduit par :

$$\text{pour tout} \varepsilon > 0, \text{ il existe} N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que}$$

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \text{ pour tout } z \in D, \ |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Il y a un risque de confondre ces deux expressions qui se ressemblent (surtout si on note N au lieu de $N_{z,\varepsilon}$ et N_ε). La différence est que pour la convergence uniforme, N_ε doit convenir **pour tous les** *$z \in D$.*

Propriété 1 (CONVERGENCE UNIFORME ET SIMPLE)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D alors elle converge simplement vers f sur D.

Preuve
Soit $z_0 \in D$.
On a $0 \leq |f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|$. *Donc si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0$, *d'après le théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(z_0) - f(z_0)| = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$. $\square$

Remarque *LA RECIPROQUE N'EST PAS VRAIE !*

Définition 3 (SUITE UNIFORMEMENT DE CAUCHY)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **uniformément de Cauchy** sur D si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que ($n \geq N_\varepsilon$ et $m \geq N_\varepsilon$) $\Rightarrow$ $\sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$.

Propriété 2 (CONVERGENCE UNIFORME ET CAUCHY)

Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur D.

En pratique, on fait d'abord l'étude de la convergence simple, ce qui détermine f. On étudie alors $\sup\limits_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|$.
Si on le **majore** par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ alors on a montré **qu'il y a** convergence uniforme.
Si on le **minore** par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \neq 0$ alors on a montré **qu'il n'y a pas** convergence uniforme.

Propriété 3 (SUITE NON CONVERGENTE UNIFORMEMENT)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas uniformément** vers f sur D, il suffit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D tels que $f_n(z_n) - f(z_n)$ ne converge pas vers 0 (limite dans $\mathbb{C}$).

4.1 Propriétés des limites uniformes

Propriété 4 (LIMITE ET CONTINUITE)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. Soit $a \in D$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Preuve

Soit $a \in D$. Soit $\varepsilon > 0$.
$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N_\varepsilon$, $\forall x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$.
$\exists \eta_\varepsilon > 0$ *tel que* $(|x-a| \leq \eta_\varepsilon$ *et* $x \in D) \Rightarrow |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| \leq \varepsilon/3$. *Donc* $(|x-a| \leq \eta_\varepsilon$ *et* $x \in D) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \leq \varepsilon$. *Donc f est continue en a.* $\square$

Remarque

On voit que la suite de fonctions $f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$ *ne converge uniformément sur $[0,1]$ vers aucune fonction. En effet elle converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas continue.*

Propriété 5 (LIMITE ET INTEGRALE)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a < b)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Preuve

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow$ pour tout $x \in [a,b]$,
$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$.
Donc, si $n \geq N$,
$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$
Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. $\square$

Remarque *Cette propriété n'est plus vraie si on n'a que la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.*

Propriété 6 (LIMITE ET DERIVABILITE)

Soient D un **disque** de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphes sur D. On suppose que

– i) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers une fonction g.

– ii) il existe $z_0 \in D$ tel que $(f_n(z_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **sur toute partie bornée** de D. De plus, f est holomorphe sur D et $f' = g$.

Remarque *Cette proposition est encore vraie pour les fonctions $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (remplacer holomorphe par dérivable et D disque de $\mathbb{C}$ par D* ***intervalle*** *de $\mathbb{R}$).*

Chapitre 5

Série de fonctions

5.1 DEFINITION

De façon analogue aux séries, les séries de fonctions sont définies à partir des suites de fonctions.

Définition 1 (SERIE DE FONCTIONS)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le même domaine D : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que la **série de fonctions** $\sum f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D ssi la **suite** des somme partielles (suites de fonctions) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D$, $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ converge simplement (resp. uniformément) sur D.

Remarque *En pratique, pour l'étude de la convergence simple d'une série de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on est ramené à l'étude de la convergence d'une série complexe.*

Propriété 1 (CRITERE DE CAUCHY UNIFORME)

Une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow \sup_{z\in D} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(z) \right| \leq \varepsilon$.

On en déduit que

Propriété 2 (CONDITION NECESSAIRE DE CONV. UNIF.)

Pour que la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \; D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D, **il faut** que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D.

Les propriétés sur la continuité, la dérivation et l'intégration viennent des propriétés des suites de fonctions :

Propriété 3 (SERIE DE FONCTIONS ET CONTINUITE)

Soit $\sum f_n$, $f_n : \; D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions et $a \in D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit **continue en** a. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur D alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Propriété 4 (SERIE DE FONCTIONS ET DERIVATIONS)

Soient D un **disque** de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphes sur D. On suppose que
- i) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur D,
- ii) il existe $z_0 \in D$ tel que $\sum f_n(z_0)$ converge.

Alors $\sum f_n$ converge simplement sur D et uniformément sur toute partie bornée de D. De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est holomorphe et $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Propriété 5 (SERIE DE FONCTIONS ET INTEGRATION)

Soit $\sum f_n$, $f_n : \; [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ une série de fonctions continues. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

On étudie maintenant une autre notion de convergence plus forte que la convergence uniforme :

Définition 2 (CONVERGENCE NORMALE)

Soit $\sum f_n$, $f_n : \; D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement** sur D ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{z\in D} |f_n(z)| < +\infty$ et $\sum \sup\limits_{z\in D} |f_n(z)|$ converge.

Remarque
En pratique,
- pour montrer **qu'il y a** *convergence normale, on cherche à majorer* $\sup_{z\in D}|f_n(z)|$ *par un réel* α_n *tel que* $\sum \alpha_n$ *soit convergente, et*
- pour montrer **qu'il n'y a pas** *convergence normale, on cherche à minorer* $\sup_{z\in D}|f_n(z)|$ *par un réel* α_n *tel que* $\sum \alpha_n$ *soit divergente.*

Une façon de minorer est d'utiliser :

Propriété 6 (SERIE NON CONVERGENTE NORMALEMENT (1))

(règle de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$) Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. Pour que $\sum f_n$ **ne converge pas normalement** sur D, il suffit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de D tels que $\sum |f_n(z_n)|$ diverge.

Remarque *Cette propriété est basée sur une minoration :*
si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n \in D$, *alors* $\sup_{z\in D}|f_n(z)| \geq |f_n(z_n)|$. *Donc, si* $\sum |f_n(z_n)|$ *diverge, alors* $\sum \sup_{z\in D}|f_n(z)|$ *diverge.*

Un cas particulier de la propriété précédente est :

Propriété 7 (SERIE NON CONVERGENTE NORMALEMENT (2))

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une série de fonctions. S'il existe $z_0 \in D$ tel que $\sum f_n(z_0)$ ne soit pas **absolument convergente**, alors $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur D.

L'intérêt de la convergence normale est dans la propriété suivante :

Propriété 8 (CONVERGENCE NORMALE ET UNIFORME)

Toute série normalement convergente est uniformément convergente.

Preuve
Si $\sum f_n$ *est normalement convergente, la suite* $\left(\sum_{k=0}^{n} \sup_{z\in D}|f_k(z)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente donc de Cauchy.*
C'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tel que* $(m > n \geq N_\varepsilon) \Rightarrow$

$\left|\sum_{k=0}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{n} \sup_{z\in D} |f_k(z)|\right| \leq \varepsilon$*, ou encore* $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)|\right| \leq \varepsilon$.

Or pour tout $z \in D$, $\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_{z\in D} |f_k(z)|$.

Donc $\sup_{z\in D} \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(z)\right| \leq \varepsilon$. *Donc* $\sum f_n$ *vérifie le critère de Cauchy uniforme sur* D. *Donc elle converge uniformément sur* D. $\square$

Autre critère de convergence uniforme :

Propriété 9 (REGLE D'ABEL UNIFORME))

Soit $\sum f_n$, $f_n : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une série de fonctions telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in D$, $f_n(z) = \alpha_n(z) u_n(z)$ avec

- i) pour tout $z \in D$, la suite $(\alpha_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et décroissante,
- ii) la suite de fonctions $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle sur D.
- iii) il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{z\in D} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k(z)\right| \leq M$.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur D.

Chapitre 6

Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 1 (SERIE ENTIERE)

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ (fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$) où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Pour étudier la convergence de la série,

Propriété 1 (THEOREME D'ABEL)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la **suite** $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

- i) pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < |z_0|$, la série (complexe) $\sum a_n z_1^n$ est absolument convergente.
- ii) $\forall r$ tel que $0 \leq r < |z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur le disque fermé $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leq r\}$.

Preuve

Si $z_0 = 0$, $\nexists z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < |z_0|$ et $\nexists r \in \mathbb{R}$ tel que $r < |z_0|$ donc la propriété est triviale. Si $z_0 \neq 0$, soit M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leq M$.

- *i) Si $z_1 \in \mathbb{C}$ est tel que $|z_1| \leq |z_0|$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_1^n| = \left|a_n z_0^n \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^n\right| \leq M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$.*
  Comme $\left|\frac{z_1}{z_0}\right| = \frac{|z_1|}{|z_0|} < 1$, $\sum M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n$ converge donc $\sum |a_n z_1^n|$ converge.
- *ii) Si $0 \leq r < |z_0|$, $\sup\limits_{z\in\bar{D}(0,r)} |a_n z^n| \leq \sup\limits_{z\in\bar{D}(0,r)} M \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^n = M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ et $\sum M \left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ converge.* $\square$

Définition 2 (RAYON DE CONVERGENCE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **rayon de convergence** de la série le nombre $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\}$.

Remarque *$\{r \in \mathbb{R}_+$ tq $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée$\} \neq \emptyset$ car il contient 0. Si cet ensemble est majoré il admet une borne sup. Sinon, on convient de poser $R = +\infty$.*

Propriété 2 (VALEURS DE RAYONS DE CONVERGENCE)

Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$.
- i) Si $R = 0$, $\sum a_n z_1^n$ ne converge que pour $z_1 = 0$.
- ii) Si $R = +\infty$, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $\sum a_n z_1^n$ converge absolument et pour tout $r \geq 0$, $\sum a_n z_1^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.
- iii) Si R est un nombre fini non nul, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < R$, $\sum a_n z_1^n$ converge absolument, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| > R$, $\sum a_n z_1^n$ diverge, pour tout r tel que $0 \leq r < R$, $\sum a_n z_1^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Définition 3 (DISQUE DE CONVERGENCE)

Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, le disque **ouvert** $\overset{o}{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| < R\}$ est appelé **disque de convergence** de la série entière.

Remarque *Si R est fini, on ne sait pas à priori si $\sum a_n z^n$ converge pour $|z| = R$.*

Détermination du rayon de convergence :

Propriété 3 (D'ALEMBERT ET RAYON DE CONVERGENCE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ (l fini ou infini). Alors

$$\text{si } 0 < l < +\infty,\ R = 1/l\,;\ \text{si } l = 0,\ R \text{ est } +\infty\,;\ \text{si } l \text{ est } +\infty,\ R = 0.$$

Remarque *Cette propriété se démontre par la règle de d'Alembert.*

Propriété 4 (FORMULE D'HADAMARD)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Notons $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. Alors

$$\text{si } 0 < l < +\infty,\ R = 1/l\,;\ \text{si } l = 0,\ R \text{ est } +\infty\,;\ \text{si } l \text{ est } +\infty,\ R = 0.$$

Exemple

1. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n!}$, R *est* $+\infty$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|n!|}{|(n+1)!|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$*).*
2. *Pour* $\sum n! z^n$, $R = 0$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)!|}{|n!|} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$*).*
3. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n}$, $R = 1$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|n+1|}{|n|} = 1$*). Pour* $|z| = 1$, $z = \exp(i\theta)$. *Si* $\theta = 0\ [2\pi]$, $\sum \frac{z^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ *diverge. Si* $\theta \neq 0\ [2\pi]$, $\sum \frac{\exp(in\theta)}{n}$ *converge (déja montré par la règle d'Abel).*
4. *Pour* $\sum \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, *(* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|(n+1)^2|}{|n^2|} = 1$*). Pour* $|z| = 1$, $\sum \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ *converge. Donc* $\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| = 1$, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *est absolument convergente.*

6.1 Opérations sur les séries entières

Propriété 5 (SOMME ET PRODUIT DE SERIES ENTIERES)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. On considère
- la série entière **somme** $\sum (a_n + b_n) z^n$, et
- la série entière **produit** $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ de rayon de convergence respectif R_s et R_p. On a alors $R_s \geq \inf(R_a, R_b)$, $R_p \geq \inf(R_a, R_b)$ et pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_1| < \inf(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z_1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z_1^n, \text{et}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z_1^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_1^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z_1^n\right).$$

Remarque *Si* $R_a \neq R_b$, *alors* $R_s = \inf(R_a, R_b)$.

6.2 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

Propriété 6 (CONTINUITE)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur $\overset{o}{D}(0, R)$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction **continue**.

Preuve

Soit $z_0 \in \overset{o}{D}(0, R)$. Alors $|z_0| < R$. Soit r tel que $|z_0| < r < R$. $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $\overline{D}(0, r)$ donc en z_0. $\square$

Pour l'étude de l'intégration des séries entières, on se restreint dans ce cours au cas des séries entières réelles : $\sum a_n x^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Toutes les propriétés des séries entières complexes sont vraies pour les séries entières réelles. Si R est la rayon de convergence d'une série entière réelle $\sum a_n z^n$, son "disque" de convergence est l'intervalle $]-R, R[$.

Propriété 7 (INTEGRATION)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors pour tout a, b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Pour l'étude de la dérivation, on revient aux fonctions complexes :

Propriété 8 (DERIVATION)

- i) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.
- ii) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors sur $\overset{o}{D}(0, R)$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est **indéfiniment dérivable** et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n z^{n-p}$.

Preuve

i) Démontré en cours,
ii) $\sum na_n z^{n-1}$ *a le même rayon de convergence* R *que* $\sum a_n z^n$.
Soit $z_0 \in \overset{o}{D}(0,R)$ *et soit* r *tel que* $|z_0| < r < R$. $\sum na_n z^{n-1}$ *et* $\sum a_n z^n$ *convergent normalement sur* $\overline{D}(0,r)$ *qui est un disque de* $\mathbb{C}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \mapsto a_n z^n$ *est holomorphe et sa dérivée est* $z \mapsto na_n z^{n-1}$ *Donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *est holomorphe sur* $\overline{D}(0,r)$ *(donc en* z_0*), et sa dérivée est*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$$

En appliquant ce résultat à la série entière dérivée $\sum na_n z^{n-1}$ *on obtient la série entière dérivée seconde* $\sum n(n-1)a_n z^{n-2}$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, *en réitérant ce processus, on obtient la série entière dérivée d'ordre* p. □

On voit là que contrairement aux autres séries de fonctions, les séries entières sont bien adaptées à la dérivation. Grâce à cette propriété, elles constituent un outil pratique pour la résolution de certaines équations différentielles :

Exemple

On cherche une série entière qui soit égale à sa dérivée (donc on cherche une série entière solution de $f'-f=0$*). On suppose donc qu'il existe* $R > 0$ *tel que pour tout* $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Donc $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.
Or $f'-f=0$ *donc pour tout* $x \in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.
Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)a_{n+1} - a_n\Big)x^n = 0$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (n+1)a_{n+1}$. *C'est à dire* $a_1 = a_0$, $a_2 = a_1/2 = a_0/2$, $a_3 = a_2/3 = a_0/6\ldots$
Montrons par récurrence que $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ *: c'est vrai aux rangs 1, 2 et 3. Supposons que ça soit vrai au rang* k *:* $a_k = \dfrac{a_0}{k!}$. *Alors* $a_{k+1} = \dfrac{a_k}{k+1} = \dfrac{a_0}{(k+1)!}$.
La série ainsi formée, $\sum \dfrac{a_0}{n!}x^n$ *a pour rayon de convergence* $+\infty$ *et on peut montrer en utilisant le théorème de Taylor-Lagrange que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_0}{n!}x^n = a_0\exp(x)$.
Donc toute série entière solution de $f'-f=0$ *est de la forme* $C\exp(x)$ *où* C *est une constante.*
En fait il n'y a pas d'autre solution, définie sur un intervalle : si g *est définie sur un intervalle* I *et telle que* $g'-g=0$, *alors*

$$\left(\frac{g(x)}{\exp(x)}\right)' = \frac{g'(x)\exp(x) - \exp(x)g(x)}{\exp(2x)} = 0.$$

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $x \in I$, $\dfrac{g(x)}{\exp(x)} = C$. *Donc* $g(x) = C\exp(x)$.

Chapitre 7

Fonctions développables en séries entières

7.1 L'exemple de l'exponentielle complexe

On a vu que l'exponentielle est (à une constante multiplicative près) la seule fonction qui soit égale à sa dérivée (sur un intervalle), et c'est la raison pour laquelle on l'utilise pour résoudre les équations différentielles d'ordre 1. Pour le montrer, on a vu que le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On généralise cette expression à tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition 1 (EXPONENTIELLE COMPLEXE)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On a toujours la propriété fondamentale de l'exponentielle.

Propriété 1 (PROPRIETE DE L'EXPONENTIELLE)

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$.

Preuve

Pour tout $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1)\exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *où pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $c_n =$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}$ *($\sum c_n$ est la série produit de $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ qui sont absolument convergentes).*

Donc $\exp(z_1)\exp(z_2) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n = \exp(z_1+z_2)$. □

On va maintenant voir pourquoi les nombres complexes de module 1 sont associés à des **rotations** :

Propriété 2 (DEVELOPPEMENT DE COS, SIN, EXP)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

- i) $\cos(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2p}$,
- ii) $\sin(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$,
- iii) $\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Preuve

- *i) pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
  $\cos^{(2n)}(x) = (-1)^n\cos(x)$ *et* $\cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\sin(x)$. *Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $2N+1$ à* $\cos$ *entre 0 et θ, on a : il existe c_N compris entre 0 et θ tel que* $\cos(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\cos^{(2n)}(0) + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos^{(2n+1)}(0)\right) + \frac{\theta^{2N+2}}{(2N+2)!}\cos^{(2N+2)}(c_N)$. *Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
  $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n\cos(0) = (-1)^n$ *et* $\cos^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1}\sin(0) = 0$*, donc* $0 \leq \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left|\cos(\theta) - \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n}\right| \leq \lim_{N\to+\infty}\frac{|\theta|^{2N+2}}{(2N+2)!} = 0$.
  La preuve du ii) est similaire.
- *iii)* $\exp(i\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} i^n\frac{\theta^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\theta^{2p} + i\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\theta^{2p+1}$ *(une suite complexe converge si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire convergent).* □

On en déduit immédiatement que $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $|\exp(i\theta)| = 1$.

7.2 Développement en série entière

On a vu en utilisant Taylor-Lagrange que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$\exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

ATTENTION : Il ne faut pas confondre ces expressions avec les développements limités en 0 de $\exp(x)$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Dans un développement **limité**, en 0, on ne garde qu'un nombre **fini** de termes, et le développement n'est utile que quand x tend vers 0.
Ici, on considère une infinité de termes et ces développements sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$. On les appelle des **développements en série entière**.

Définition 2 (DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE)

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que D soit **un voisinage de** 0. On dit que f admet un **développement en série entière** sur D si et seulement si il existe une suite de coefficients complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $z \in D$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On va voir que si elle existe, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement unique et liée aux dérivées successives de f :

Propriété 3 (DERIVEE N-IEME)

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développable en série entière sur D. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0)$ existe et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve
Puisque f coïncide au voisinage de 0 avec $z \mapsto \sum a_n z^n$ qui est indéfiniment dérivable en 0, f l'est aussi. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$f^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n 0^{n-p} = p(p-1)\dots 1\ a_p.$ $\square$

A cause de cette propriété, à toute fonction indéfiniment dérivable en 0 on associe sa **série de Taylor** en 0.

Définition 3 (SSERIE DE TAYLOR)

Soit $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivable en 0. La **série de Taylor** de f en 0 est la série $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$.

Deux questions se posent alors

1. La série $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ converge-t-elle ?
2. Si oui, converge-t-elle vers $f(z)$?

Il est évident que pour $z = 0$, la série converge vers $f(0)$. Par contre, pour $z \neq 0$, la reponse peut être non à chacune de ces questions. Des exemples seront étudiés en TD.

Remarque *On définit de la même façon que dans $\mathbb{C}$ les fonctions développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et leur série de Taylor. Pour savoir si une fonction réelle indéfiniment dérivable en 0 est développables en série entière, les deux mêmes questions se posent, et la réponse peut être non à chacune de ces questions.*

La formule de Taylor-Lagrange donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière. Dans ce cours, on ne la donne que pour les fonctions réelles.

Propriété 4 (CONDITION SUFFISANTE)

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle contenant 0. On suppose que f est indéfiniment dérivable sur I, et qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in I$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors f est développable en série entière.

Remarque *On a déjà utilisé cette propriété pour développer* $\exp$, $\cos$ *et* $\sin$.

Preuve
On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x, à l'ordre N :
il existe c_N compris entre 0 et x tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N)}(c_N).$$

Donc $0 \leq \lim_{N \to +\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leq \lim_{N \to +\infty} \dfrac{x^{N+1}}{(N+1)!} M = 0.$ □

7.3 Développement des fonctions usuelles

Souvent, pour développer une fonction en série entière, on se ramène à des fonctions usuelles (comme pour les développements limités).

Propriété 5 (FONCTIONS USUELLES)

- Famille de l'exponentielle :
  pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
  $\mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, et
  $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
  Toutes ces séries entières ont donc un rayon de convergence infini.

- Famille du binôme :
  pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,
  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$,et
  $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,
  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, et
  $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
  Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,
  $(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$.
  Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence égal à 1.

Remarque

1. *De la même façon qu'on a défini* $\exp(z)$*, pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on peut définir* $\cos(z)$*,* $\sin(z)$*,* $\mathrm{ch}(z)$ *et* $\mathrm{sh}(z)$*, pour tout* $z \in \mathbb{C}$*. Les développements de ces fonctions donnés dans la propriété précédente sont encore valables dans* $\mathbb{C}$*. Mais ces fonctions définies sur* $\mathbb{C}$ *sont beaucoup moins utilisées que l'exponentielle complexe.*

2. *Le développement de* $\dfrac{1}{1-z}$ *se calcule facilement en étudiant la série géométrique* $\sum z^n$*. On en déduit le développement de* $\dfrac{1}{1+z}$ *en changeant* z *en* $-z$*, puis celui de* $\ln(1+x)$ *en se restreignant à* $x \in \mathbb{R}$ *puis en prenant la primitive du développement de* $\dfrac{1}{1+x}$*. De même, on calcule le développement de* $\arctan(x)$ *en développant d'abord sa dérivée* $\dfrac{1}{1+x^2}$*.*
3. *Le développement de* $(1+x)^\alpha$ *n'est valable que pour* α <u>*indépendant de* x</u>*. La méthode la plus pratique pour le calculer est d'utiliser une équation différentielle (voir en TD). Pour* $\alpha \in \mathbb{N}$*, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans ce développement, et on retrouve la formule du binôme de Newton :* $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} x^n$*.*
4. *Les fonctions* $\ln(1+x)$*,* $\arctan(x)$ *et* $(1+x)^\alpha$ *peuvent elles aussi être prolongées à* $\overset{o}{D}(0,1) \subset \mathbb{C}$ *de façon à ce que les développements donnés dans la propriété précédente soient encore valables. Mais il y a plusieurs façons de définir ces fonctions dans le cas complexe et on ne considèrera que le cas réel dans ce cours.*

Chapitre 8

Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions d'un type particulier, qui servent à étudier les fonctions périodiques. L'idée est d'exprimer une fonction 2π-périodique quelconque comme une combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques simples, de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$, avec $n \in \mathbb{N}$. Cette "combinaison linéaire" sera, en général, une somme infinie, c'est à dire une série :

Définition 1 (SERIE TRIGNONOMETRIQUE)

On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et,pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$ et $b_n \in \mathbb{C}$.

Propriété 1 (CONVERGENCE)

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la série trigonométrique $\sum \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Preuve
$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Big| a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big| \leq |a_n| + |b_n|$. *Or, si* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *convergent absolument alors* $\sum(|a_n| + |b_n|)$ *converge donc*
$\sum \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Big| a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big|$ *converge.* $\square$

Avec des hypothèses moins fortes sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

Propriété 2 (CONVERGENCE (2))

Si les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont réelles, décroissantes, et tendent vers 0 alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ fixé $\sum\big(a_n\cos(nx_0)+b_n\sin(nx_0)\big)$ converge.
De plus pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big)$ converge uniformément sur chaque intervalle de la forme $[2n\pi+\varepsilon, 2(n+1)\pi-\varepsilon]$ avec $n\in\mathbb{Z}$.

La preuve de cette propriété est une application de la règle d'Abel uniforme.

En utilisant les formules d'Euler, on peut réécrire une série trigonométrique en remplaçant les $\cos$ et $\sin$ par des exponentielles :

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) = \left(\dfrac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\left(\dfrac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}$.

Cette remarque permet d'introduire ce qu'on appelle l'**écriture complexe d'une série trigonométrique**. Mais pour ça, l'habitude est d'utiliser des séries pour lesquelles l'indice n est dans $\mathbb{Z}$ et non plus simplement dans $\mathbb{N}$:

Définition 2 (INDICE ENTIER RELATIF)

La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ est par définition la série $\displaystyle x_0+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n+x_{-n})$.

On a alors :

Propriété 3 (ECRITURE COMPLEXE)

Toute série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\Big)$ peut se réécrire sous la forme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_ne^{inx}$ avec $c_0=a_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}$ et $c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}$. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=c_n+c_{-n}$ et $b_n=i(c_n-c_{-n})$.

Lorsqu'une série trigonométrique converge uniformément sur $[-\pi,\pi]$, on peut retrouver ses coefficients en fonction de sa somme :

Propriété 4 (EVALUATION DES COEFFICIENTS)

Soit $\sum \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$ une série trigonométrique uniformément convergente sur $[-\pi, \pi]$.

Notons, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx)dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(nx)dx$.

Remarque

1. *S est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On a donc ici des intégrales de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auxquelles il faut donner un sens.*

   Par définition, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx$.

2. *On n'a pas d'expression pour b_0. En fait, puisque b_0 est le coefficient de $\sin(0x) = 0$, il n'a aucune importance, on peut choisir par exemple $b_0 = 0$.*

Si la série trigonométrique est donnée par son écriture complexe, les expressions se simplifient :

Propriété 5 (SERIE TRIGO-COMPLEXE)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ une série trigonométrique écrite sous forme complexe qui converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x)e^{-inx}dx$.

Preuve *Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$ fixé. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$,*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x)e^{-in_0x}dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} e^{-in_0x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} c_n e^{inx} e^{-in_0x}dx.
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-in_0x}dx = \begin{cases} 1 \text{ si } n = n_0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \qquad \square$$

Cette propriété a une interprétation géométrique simple qui sera développée dans le paragraphe sur l'égalité de Parseval.

Remarque *Puisque $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ sont 2π-périodiques, $S(x)$ l'est aussi. A cause de ça, on peut changer l'intervalle d'intégration : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} S(x)e^{-inx}dx$. La même chose est vraie pour a_n et b_n.*

Maintenant qu'on a étudié les séries trigonométriques, on peut revenir au programme de départ : étant donnée une fonction 2π-périodique quelconque, peut-on la réécrire comme la somme d'une série trigonométique ?

Définition 3 (SERIE DE FOURIER)

(SERIE DE FOURIER)
Soit f une fonction 2π-périodique. Sa **série de Fourier** est par définition la série trigonométrique $\sum \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ définie par
$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ et
$b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, si ces intégrales sont définies.
Ou, de façon équivalente, c'est la série trigonométrique écrite sous forme complexe $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ où, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$. Les coefficients a_n et b_n (ou, de façon équivalente, c_n) sont appelés **coefficients de Fourier** de f.

Propriété 6 (PARITE)

1. Puisque f est 2π-périodique, on peut changer l'intervalle d'intégration en $[\alpha, \alpha + 2\pi]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Si f est paire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$.
3. Si f est impaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

De façon analogue à ce qui se passe quand on développe une fonction en série entière, étant donnée une fonction f 2π-périodique dont les coefficients de Fourier sont définis, deux questions se posent :

1. La série de Fourier de f converge-t-elle ?
2. Si oui, converge-t-elle vers f ?

Malheureusement, comme pour les séries entières, la réponse peut être non à chacune de ces questions.
Il existe toute une théorie décrivant la convergence de la série de Fourier sous diverses hypothèses sur f. Parmis cette théorie, on retiendra pour ce cours le résultat suivant :

Théorème 1 (DIRICHLET JORDAN)

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On suppose qu'en ces points de discontinuité, f admet une **limite à droite** et une **limite à gauche** finies. Enfin, on suppose que f admet en tout point de $[-\pi, \pi]$ une **dérivée à droite** et une **dérivée à gauche** (finies). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f est convergente en x et a pour somme $\frac{1}{2}\left(\lim_{y \to x^+} f(y) + \lim_{y \to x^-} f(y)\right)$.
En particulier, **en tout point** x **où** f **est continue**, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$.

Il est pratique de réinterpréter la théorie des séries de Fourier en utilisant les notions d'**espace vectoriel** et de **produit scalaire**. On peut alors retenir certains aspects des séries de Fourier en gardant en tête l'analogie avec l'espace vectoriel simple qu'est $\mathbb{R}^2$, qui est muni du produit scalaire $\vec{x}.\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2$. Cette analogie s'écrit de façon plus naturelle quand on utilise l'écriture complexe des séries de Fourier.
L'espace qui, pour les séries de Fourier, joue le rôle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble de fonctions
$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ 2\pi\text{-periodiques et dont le carré est intégrable sur } [-\pi, \pi]\}$.
On peut définir un produit sur $\mathcal{F}$ (une fonction $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{C}$) qui jouera le rôle du produit scalaire de $\mathbb{R}^2$:

Définition 4 (PRODUIT SCALAIRE)

Pour $f, g \in \mathcal{F}$, on appelle **produit scalaire** de f et g, et on note (f, g) le nombre complexe $(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$ où $\bar{g}(x)$ désigne le nombre complexe conjugué de $g(x)$.

Lorsqu'on a un produit scalaire, on peut définir une **norme** :

Définition 5 (NORME)

(NORME) Soit $f \in \mathcal{F}$. On appelle **norme** de f et on note $||f||$ le nombre réel positif $||f|| = \sqrt{(f, f)}$.

Remarque *La norme de $\mathbb{R}^2$ est construite de cette façon à partir du produit scalaire : $||\vec{x}|| = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.*

Propriété 7 (BASE ORTHONORMEE)

L'ensemble (infini) des fonctions $\{x \mapsto e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ forme une **base orthonormée** (infinie) de $\mathcal{F}$ muni du produit scalaire $(.,.)$.

En effet on a déjà vu que pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-in_0x}dx = \begin{cases} 1 \text{ si } n = n_0, \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

ce qui se traduit par

$$(e^{in_0x}, e^{inx}) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = n_0, \\ \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

ce qui est la définition d'une **famille orthonormée**. Le fait que cette famille contienne assez d'éléments pour être considérée comme une base nécessite des développements supplémentaires :
La différence entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{F}$ est qu'une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ ne contient que 2 éléments alors qu'une base orthonormée de $\mathcal{F}$ contient une infinité d'éléments. On dit que $\mathcal{F}$ est **de dimension infinie**.
Par analogie avec $\mathbb{R}^2$, on dit qu'on a décomposé $f \in \mathcal{F}$ suivant la base orthonormée $\{x \mapsto e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$ si on a trouvé des coefficients $c_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\lim\limits_{N\to+\infty} ||f(x) - \sum\limits_{n=-N}^{+N} c_n e^{inx}|| = 0$. La proposition précédente affirme que **cette décomposition est possible pour tout** $f \in \mathcal{F}$. Alors on obtient l'interprétation suivante.

8.1 Interprétation géométrique des séries de Fourier

Soit $f \in \mathcal{F}$. Sa série de Fourier n'est rien d'autre que sa **décomposition suivant la base orthonormée** $\{x \mapsto e^{inx},\ n \in \mathbb{Z}\}$. Cette interprétation permet de retenir l'expression des coefficients de Fourier de f :

Propriété 8 (PROJECTION ORTHOGONALE)

Soit $f \in \mathcal{F}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ son coefficient de Fourier c_n est la **projection orthogonale** de f sur e^{inx}, c'est à dire $c_n = (f(x), e^{inx}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

Enfin, cette interprétation permet de relier la norme de f avec ses coefficients de Fourier :

Théorème 2 (PARSEVAL-BESSEL)

Soit $f \in \mathcal{F}$ et $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture complexe, $\{(a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ ses coefficients de Fourier en écriture réelle. Alors la norme de f vérifie :

1. **Inégalité de Bessel :** pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$||f||^2 = (f, f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{f}(x)dx \geq \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

$$= |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

2. **Egalité de Parseval :**

$$||f||^2 = (f, f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Chapitre 9

INTEGRALES DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Une intégrale dépendant d'un paramètre est une fonction de la forme

$$\varphi(x) = \int_J f(x,t)dt.$$

Nous intègrons donc en fonction de t sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$, mais cette fonction dépend d'un paramètre x. En intégrant, nous obtenons donc une nouvelle fonction qui dépendra de x, notée ici φ. En général on ne sait pas calculer explicitement l'intégrale, et donc la seule expression que nous puissions avoir de φ sera sa forme intégrale et non pas explicite. Nous essayons quand même d'avoir des informations sur φ concernant sa continuité, dérivabilité et même son intégration quand c'est possible. C'est le but de ce chapitre. Il existe une théorie développée sur des espaces vectoriels, mais nous ne nous contenterons dans cette partie que de fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_J f(x,t)dt, \end{array}$$

où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ bornés ou non, avec $x \in I$ et $t \in J$. Nous nous limiterons ici dans le cadre des intégrales de Riemann, pour un cadre plus général il faudra se référer au cours d'intégration de troisième année de licence.

Remarque *Nous verrons que lorsque J n'est pas borné, par exemple $J = [a, +\infty[$ la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, où $x \in I$ n'est pas comme notre intuition pourrait le laisser penser.*

En effet, nous serions évidemment tentés d'écrire que cette limite est la même que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f(x,t)dt = \int_a^{+\infty} f(x_0,t)dt$ mais c'est faux en général.

Nous pouvons le montrer avec l'exemple suivant.

Exemple

Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-tx}dt$ *définie pour* $x \geq 0$. *On pose* $f(t,x) = xe^{-tx}$.
On a donc $\varphi(0) = 0$, *et un simple calcul nous montre que pour tout* $x > 0$, $\varphi(x) = 1$. *Par conséquent,* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = 1$
D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0} xe^{-tx} = 0$ *et donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} f(x,t)dt = 0$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) \neq \int_0^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} f(x,t)dt$.
On montrerait également que $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \neq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

9.1 Intervalle d'intégration J compact

Dans cette section, nous supposerons que $t \in J = [a,b]$, avec a et b des réels tels que $a < b$ (ce n'est pas nécessaire mais cela simplifiera les notations). Nous allons donc considérer φ de la forme

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array}$$

Théorème 1 (CONTINUITE)

On suppose f continue sur $I \times [a,b]$, alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array}$$

est définie et continue sur l'intervalle I.

Preuve *Démontré en cours.*

Théorème 2 (DERIVEE)

On suppose que
i. f est continue sur $I \times [a,b]$,
ii. f admet une dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x} f$ sur $I \times [a,b]$ et l'application $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est continue pour tout $(x,t) \in I \times [a,b]$
alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array}$$

est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur lintervalle I. On a de plus pour tout $x \in I$,

$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Preuve *Démontré en cours.*

Théorème 3 (DERIVEE D'ORDRE SUPERIEUR)

On suppose que
i. l'application f continue sur $I \times [a,b]$,
ii. L'application f admet des dérivées partielles $\frac{\partial^m}{\partial x^m} f$ jusqu'à l'ordre n (respectivement à tout ordre) sur $I \times [a,b]$ et pour tout $m \leq n$ (respectivement pour tout m) les applications $(x,t) \mapsto \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x,t)$ sont continues pour tout $(x,t) \in I \times [a,b]$
alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array}$$

est définie et de classe $\mathscr{C}^m$ (respectivement de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur lintervalle I. On a de plus pour tout $m \leq n$ (respectivement pour tout $m \in \mathbb{N}$), pour tout $x \in I$,

$$\varphi^{(m)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x,t)dt.$$

Preuve *Démontré en cours.*

Théorème 4 (INTEGRATION : FUBINI)

On suppose que $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue (où $[\alpha, \beta]$ et $[a, b]$ sont des segments fermés bornés de $\mathbb{R}$), alors les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [\alpha, \beta] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array} \qquad et \quad \begin{array}{rccc} \phi : & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dx, \end{array}$$

sont continues, et l'on a

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right) dt = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)dt \right) dx.$$

9.2 Intervalle d'intégration J non borné

Dans cette section, on ne suppose plus un intervalle d'intégration $[a, b]$ mais un intervalle du type $[a, +\infty[$, le cas $]-\infty, a]$ se fait de façon analogue. Nous allons considérer ici une application

$$\begin{array}{rccc} f : & I \times [a, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & f(x,t), \end{array}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Comme nous l'avon dans l'introduction de ce chapitre, la continuité seule de f ne sera pas suffisante pour obtenir des résultats similaires à la section précédente. Nous devrons avoir des hypothèses supplémentaires qu'il ne faudra pas oublier de montrer, sinon nous ne pourrons pas conclure.

9.2.1 Rappel

Avant toute chose, il faut tout d'abord s'assurer que pour tout $x \in I$ l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge.

On rappelle la définition du chapitre 3. adapté à notre fonction f.

Définition 1 (INTEGRALE IMPROPRE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable sur tout intervalle borné $I \times [a, b]$ inclus dans $I \times [a, +\infty[$. Si $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x,t)dt$ existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge, et on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt = \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x,t)dt$. Sinon, on dit que l'intégrale impropre diverge.

9.2.2 Convergence

Définition 2 (CONVERGENCE UNIFORME)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur tout intervalle $I \times [a, +\infty[$. On dit que pour tout $x \in I$ l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

converge uniformément sur I si on a :
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$, $A \geq a$, tel que pour tout $T > A$, et pour tout $x \in I$, on a

$$|\int_T^{+\infty} f(x,t)dt| < \varepsilon.$$

On en déduit la propriété suivante.

Propriété 1 (CRITERE DE CAUCHY UNIFORME)

Sous les notations et hypothèses de la définition précédente, on dit que l'intégrale généralisée converge uniformément sur l'intervalle I si et seulement si
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A et $T' > A \in \mathbb{R}$, $A \geq a$, tels que pour tout T tel que $T > T' > A$, et pour tout $x \in I$, on a

$$|\int_{T'}^{T} f(x,t)dt| < \varepsilon.$$

Définition 3 (CONVERGENCE NORMALE OU DOMINEE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur tout intervalle $I \times [a, +\infty[$. On dit que pour tout $x \in I$ l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

converge normalement sur une partie V de I s'il existe une fonction positive continue $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

i. pour tout $x \in V$ et pour tout $t \in [a, +\infty[$,

$$|f(x,t)| \leq g(t),$$

ii. l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt$$

est convergente.

Propriété 2 (CONVERGENCE NORMALE ET UNIFORME)

Si une intégrale généralisée converge normalement, elle converge uniformément.

Propriété 3 (CONVERGENCE UNIFORME ET CONTINUITE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur tout intervalle $I \times [a, +\infty[$. Si l'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

converge uniformément sur tout intervalle fermé bornée contenu dans l'intervalle I, alors la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt$$

est continue sur I.

En règle générale il suffit de montrer le résultat suivant pour avoir la continuité de φ.

Propriété 4 (CONTINUITE SOUS LE SIGNE INTEGRAL)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur tout intervalle $I \times [a, +\infty[$ tels que :
i. pour tout $x \in I$ la fonction $x \to f(x, t)$ est continue sur I,
ii. pour tout $t \in [a, +\infty[$, la fonction $t \to f(x, t)$ est continue et intégrable sur $[a, +\infty[$,
iii. il existe une fonction $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable sur $[a, +\infty[$ telle que pour tout $(x, t) \in I \times [a, +\infty[$,

$$|f(x, t)| \leq g(t).$$

Alors la fonction φ définie pour tout $x \in I$ par

$$\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dt$$

est continue sur I.

Propriété 5 (CONVERGENCE UNIFORME ET DERIVEE)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : I \times [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur tout intervalle $I \times [a, +\infty[$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :
i. il existe x_0 dans I tel que l'intégrale suivante

$$\int_a^{+\infty} f(x_0, t)dt$$

converge.
ii. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable continue sur $I \times [a, +\infty[$,
iii. L'intégrale généralisée

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt \tag{9.1}$$

converge uniformément sur tout intervalle fermé borné de I,
alors la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)dt$$

est dérivable sur I et

$$\varphi'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)dt.$$

Chapitre 10

Fonctions Eulériennes

Parmi les applications des fonctions dépendant d'un paramètre, nous pouvons trouver les fonctions eulériennes.

Chapitre 11

Transformées de Laplace

11.1 Rappel

En première année, on a vu que la différentiation et l'intégration sont des transformées, autrement dit, ces opérations transforment une fonction en une autre.
De plu, ces deux transformées sont linéaires. Dans ce chapitre, nous allons étudier une transformée particulière : la transformée de Laplace.
Auparavant définissons la notion de transformée intégrale.

Définition 1 (TRANSFORMEE INTEGRALE)

Si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors une intégrale définie par rapport à l'une des deux variables conduit à une fonction de l'autre variable. Autrement dit,

$$F : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & F(y) = \displaystyle\int f(x, y)dx. \end{array} \right.$$

De façon analogue, une intégrale définie par $\displaystyle\int_a^b K(s,t)f(t)dt$ transforme une fonction f de variable t en une fonction F de variable s.
Nous nous intéressons tout particulièrement ici à une transformée intégrale où l'intervalle d'intégration est l'intervalle non bornée $[0, +\infty[$.
On rappelle, d'après les chapitres précédents, que si pour tout $t \in \mathbb{R}+$, $t \mapsto f(t)$ est définie, alors on définit

$$\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_b^\infty K(s,t)f(t)dt,$$

comme étant une intégrale impropre. Si la limite existe on dit que l'intégrale est convergente, sinon elle diverge.
Dans ce qui suit, nous allons prendre $K(x,t) = e^{-st}$: c'est comme cela que nous allons définir la transformée de Laplace.

11.2 Définition

Définition 2 (TRANSFORMEE DE LAPLACE)

Soit f une fonction définie pour $t \geq 0$. Alors l'intégrale

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{11.1}$$

est appelée transformée de Laplace de f sous la condition qu'elle converge. Si elle converge le résultat est une fonction de s que nous supposerons réels ici (il est à noté que la plupart du temps on considère s complexe, mais pour la clarté de ce chapitre nous resterons sur les réels).

Notation : Nous aurons pour habitude dans ce chapitre de noter les transformées de Laplace en majuscule correspondant à la fonction transformée. Par exemple,

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}, G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}, Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}, ...$$

Propriété 1 (LINEARITE)

Lorsqu'elle existe, la transformée de Laplace $\mathscr{L}$ est une transformée linéaire, autrement dit pour tous f, g tels que $\mathscr{L}\{f\}$ et $\mathscr{L}\{g\}$ existent et pour tous réels α et β, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha f(t) + \beta g(t)] dt &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t) dt \\
&= \alpha \mathscr{L}\{f(t)\} + \beta \mathscr{L}\{g(t)\} \\
&= \alpha F(s) + \beta G(s)
\end{aligned}$$

11.3 Quelques fonctions élémentaires

Présentons dans cette section les transformées de Laplace des fonctions élémentaires les plus usuelles avec les conditions sur s pour avoir leur existence.

	Fonction	Transformée	Condition
a.	$\mathscr{L}\{1\}$	$= \dfrac{1}{s}$	$s > 0$
b.	$\mathscr{L}\{t^n\}$	$= \dfrac{n!}{s^{n+1}}, n \in \mathbb{N}^*$	$s > 0$
c.	$\mathscr{L}\{e^{at}\}$	$= \dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
d.	$\mathscr{L}\{\sin(kt)\}$	$= \dfrac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
e.	$\mathscr{L}\{\cos(kt)\}$	$= \dfrac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
f.	$\mathscr{L}\{\sinh(kt)\}$	$= \dfrac{k}{s^2-k^2}$	$s > \|a\|$
g.	$\mathscr{L}\{\cosh(kt)\}$	$= \dfrac{s}{s^2-k^2}$	$s > \|a\|$

11.4 Existence de $\mathscr{L}$

Rappelons ce qu'est une fonction continue par morceaux.

Définition 3 (CONTINUITE PAR MORCEAUX)

Une fonction est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ si pour chaque intervalle $0 \leq a \leq t \leq b$, il existe un nombre fini de points t_k, $k = 1, 2, ..., n$ $(t_{k-1} \leq t_k)$ sur lesquels f possde des discontinuits et qui est continue sur chaque intervalle ouvert $t_{k-1} < t < t_k$.

Nous introduisons alors une nouvelle notion appelée ordre exponentiel, qui permet de maîtriser les variations de la fonction f en fonction de certaines exponentielles.

Définition 4 (ORDRE EXPONENTIEL)

Une fonction est d'ordre exponentiel c s'il existe des constantes réelles $c, M > 0$ et $T > 0$ telles que $|f(t)| \leq Me^{ct}$, pour tout $t > T$.

Nous pouvons alors énoncer une condition suffisante d'existence de transformée de Laplace.

Théorème 1 (CONDITION SUFFISANTE)

Si f, continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ est d'ordre exponentiel c pour $t > T$ alors $\mathscr{L}f(t)$ existe pour $s > c$.
Attention, ces conditions ne sont pas nécessaires !

11.5 Transformée inverse et transformée de dérivées

11.5.1 Transformée inverse

Définition 5 (TRANSFORMEE INVERSE)

Si $F(s)$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f, *i.e.* $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, alors $f(t)$ est la transformée de Laplace inverse de $F(s)$ et nous notons

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Quelques transformées inverses

	Transformée	Transformée inverse
a.	1	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}$
b.	t^n	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}, n \in \mathbb{N}^*$
c.	e^{at}	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}$
d.	$\sin(kt)$	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2+k^2}\}$
e.	$\cos(kt)$	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+k^2}\}$
f.	$\sinh(kt)$	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{k}{s^2-k^2}\}$
g.	$\cosh(kt)$	$= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-k^2}\}$

Etat que la transformée de Laplace d'une application nulle $t \mapsto \mathscr{N}(t)$, est nulle, il résulte de cela que deux fonctions différentes peuvent avoir la même transformée de Laplace :
$\mathscr{L}(f(t) + \mathscr{N}(t)) = \mathscr{L}(f(t)) = F(t)$

Exemple *Voir exemple en cours ou TD.*

Par conséquent, si nous acceptons la fonction nulle, nous voyons que la transformée inverse de Laplace n'est pas unique.
D'un autre côté, elle sera unique si nous n'acceptons pas les fonctions nulles. Ce résultat s'énonce dans le théorème suivant.

Théorème 2 (LERCH)

Si nous nous restreignons aux fonction f qui sont continues par morceaux sur tout intervalle fini $[0, N]$, $N \in \mathbb{R}_+^*$ et d'ordre exponentiel pour $t > N$, alors la transformée inverse de Laplace $F(s)$ est unique.

Remarque
-$\mathscr{L}^{-1}$ est un opérateur linéaire, autrement dit, pour tous α, β constantes, et s tels que $F(s)$ et $G(s)$ existent,

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\},$$

où F et G sont des transformées des fonctions f et g.

11.5.2 Transformer une dérivée

Le but de ce chapitre sur les transformées de Laplace est de les utiliser pour la résolution d'équations différentielles.
Supposons que f soit continue et d'ordre exponentiel pour tout $t \geq 0$ et que f' soit continue par morceaux pour tout $t \geq 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f'(t)\} &= \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)dt \\ &= [e^{-st}f(t)]_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt \\ &= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}.\end{aligned}$$

donc $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$. De mme, $\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, et $\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$,

Théorème 3 (DERIVEE)

Si f, f', ..., f^{n-1} sont continues sur $[0, +\infty)$ et sont d'ordre exponentiel et si $f^{(n)}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ alors

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

où $F(s) = \mathscr{L}f(t)$.

11.6 Résolution d'équations différentielles

Dans cette section, nous allons nous intéresser à une méthode de résolution des équations différentielle linéaires d'ordre n à coefficients constants grâce aux transformées de Laplace.
Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_0 x(t) = g(t), \\ \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, ... \quad x^{(n-1)} = x_{n-1}, \end{cases} \tag{11.2}$$

où les a_i et les y_i, $i = 0, ..., n$ sont constantes. Par la propriété de linéarité, la transformée de Laplace de cette combinaison linéaire est une combinaison linéaire de transformées de Laplace :

$$a_n \mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\} + a_{n-1}\mathscr{L}\{x^{(n-1)}(t)\} + ... + a_0 \mathscr{L}\{x(t)\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \tag{11.3}$$

Le système (11.2) devient alors

$$\begin{array}{lcl} a_n[s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - ... - x^{(n-1)}(0)] & + & \\ a_{n-1}[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x(0) - ... - x^{(n-2)}(0)] & + & a_0 X(s) = G(s), \end{array} \tag{11.4}$$

où $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$ et $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$. l'équation linéaire devient alors une équation algébrique en $X(s)$. On résout alors l'équation transformée (11.4) pour $X(s)$,

$$P(s)X(s) = Q(s) + G(s). \tag{11.5}$$

On écrit $X(s) = \dfrac{Q(s)}{P(s)} + \dfrac{G(s)}{P(s)}$ où $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0$, $Q(s)$ est un polynôme de degré $\leq n - 1$ et $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$.
Il est à noté que pour cette étape il sera demandé de bien se souvenir de la décomposition en éléments simples des fractions rationelles du cours d'algèbre II.
Enfin on résout $x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$.

Théorème 4 (LIMITE)

Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty)$ et d'ordre exponentiel pour $t > T$ alors $\lim_{s\to+\infty} \mathscr{L}\{f(t)\} = 0$.

Remarque *Ce théorème perrmet de dire si .*

Remarque *La transforme de Laplace inverse peut ne pas tre unique, i.e.* $\mathscr{L}\{f_1(t)\} = \mathscr{L}\{f_2(t)\}$ *avec* $f_1 \neq f_2$*. Mais si* $f_1 \neq f_2$ *sont continues par morceaux sur* $[0, +\infty)$ *et d'ordre exponentiel alors* f_1 *et* f_2 *sont dites "essentiellement" les mmes, et si elles sont continues, on dit que ce sont les mmes.*

11.7 Thorme de translation

Il n'est pas pratique d'utiliser la transforme de Laplace (sa dfinition) chaque fois que nous souhaitons trouver la transforme de Laplace d'une fonction f. Dans ce paragraphe, nous prsentons des thormes qui nous viterons un travail fastidieux et qui nous permettront de construire une liste plus longue de transformes de Laplace.

11.7.1 Translation sur l'axe des s

11.7.2 Translation sur l'axe des t

Définition 11.1 ***Fonction de Heaviside*** *La fonction de Heaviside $\mathscr{U}(t-a)$ ($\mathscr{U}$ pour "Unit Step Function") est dfinie par*

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < a, \\ 1 & si \quad t \geq a. \end{cases}$$

11.8 Proprits additionnelles

11.8.1 Multiplier une fonction par t^n

11.8.2 Convolution

Si les fonction f et g sont continues par morceaux sur $[0, +\infty)$, alors un produit "spcial" not $f * g$ est dfini par l'intgrale

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

C'est la convolution de f et g. C'est une fonction de t.

N.B. : $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$, autrement dit $f*g = g*f$. Mais ATTENTION, l'intgrale d'un produit n'est pas gal au produit des intgrales ! ! ! Par contre, la transforme de Laplace d'un produit "spcial" est le produit des transformes de Laplace. Ce qui est intressant ici est donc de trouver la transforme de Laplace d'un produit de convolution sans calculer l'intgrale de Laplace.

11.8.3 Transforme d'une intgrale

Quand $g(t) = 1$ et $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}$, alors $\mathscr{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s}$ et donc $\int_0^t f(\tau)d\tau = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}$

11.8.4 Equation intgrale de Volterra

Le thorme de convolution et le rsultat de l'intgrale d'une transforme sont utiles pour rsoudre des quations dans lesquelles la fonction inconnue apparat sous le signe $\int$.

Equation intgrale de Volterra

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

o g et h sont connues.

Voir TD pour un exemple de rsolution d'une telle quation.

11.8.5 Transforme de fonction priodique

Si f est priodique de priode T, $T > 0$, $f(t+T) = f(t)$.

11.8.6 Fonction δ-Dirac

Les systmes mcaniques sont souvent soumis des forces externes de large magnitude sur une priode trs brve (une aile d'avion qui vibre frappe par un clair, une masse sur un ressort (flipper), une balle (golf, tennis, base-ball etc...).

Impulsion :

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 - a, \\ \dfrac{1}{2a} & t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \\ 0 & t \geq t_0 + a, \end{cases}$$

o $a > 0$ et $t_0 > 0$. Quand $a \to 0$, $\delta_a(t-t_0)$ tend vers la fonction δ-Dirac.

Fonction δ-Dirac : quelques proprits :

i. $\delta(t-t_0) = \lim_{a\to 0} \delta_a(t-t_0)$

ii. $\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & sit = t_0 \\ 0 & sit \neq t_0 \end{cases}$

iii. $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-t_0)dt = 1$