Laurent PUJO-MENJOUET
pas de t !
Bât. BRACONNIER - Bureau 246
pujo@math.univ-lyon1.fr
math.univ-lyon1.fr/~pujo → ENSEIGNEMENT → PRINTEMPS 2025 → BISM

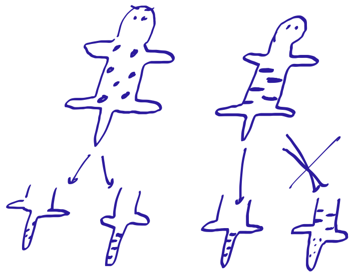
Référence : MATHEMATICAL BIOLOGY JAMES MURRAY (2 VOLUMES) (VOLUME 1).

Biologie mathématique et modélisation avec des équations aux dérivées partielles

I Introduction : les systèmes de réaction-diffusion

Dans un cadre biologique, ils ont été introduits essentiellement par Alan TURING en 1952 pour étudier la MORPHOGENÈSE (apparition des formes dans les embryons) au cours de laquelle des formes semblent apparaître "à partir de rien". Turing a montré que ce type d'émergence de forme peut avoir lieu dans des systèmes "très simple" comme des mélanges d'espèces chimiques soumises à de la diffusion et de la réaction :

Ces formes dites STRUCTURES DE TURING (TURING PATTERNS) ont été utilisées depuis les années 70 dans de nombreux travaux de biomathématiques : dessins sur les pelages d'animaux, apparitions de structures dans des communautés (villes, cimetières de fourmis, ...)



II La diffusion :

L'équation type décrivant les phénomènes diffusifs est :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = d.\,\Delta u(t,x)} \quad (1)$$

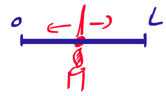
équation de la chaleur, historiquement introduite par FOURIER

u : quantité qui diffuse

t : temps ($t \geq 0$)

x : espace $\quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ (OMEGA) $\quad N=1,2$ ou 3 ici ce sera $N=1$, $x \in [0,L]$ ($L>0$)

DELTA $\to \Delta$: opérateur de diffusion appelé LAPLACIEN

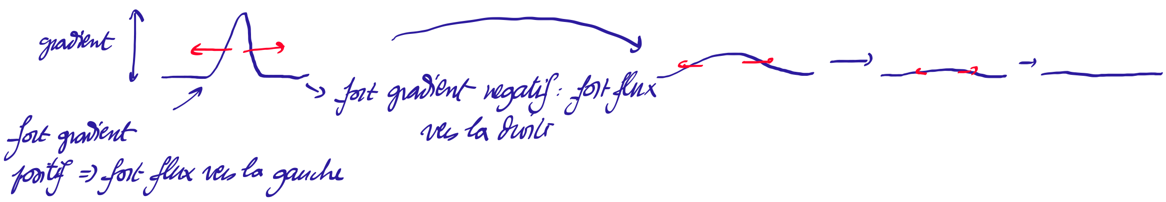


$N=1$ (dimension 1) $\quad \Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$

$N=2$ (" 2) $\quad \Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(t,x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(t,x)$ où $x = \binom{x_1}{x_2}$

d : coefficient de diffusion $\boxed{(d>0)}$

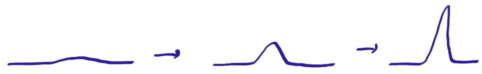
Définition : La diffusion est un phénomène pour lequel "le flux est proportionnel au gradient"



On peut dire que la diffusion "aplatit" les bosses d'autant plus vite qu'elles sont hautes

Que se passe-t-il si $d<0$?

Que se passe-t-il si $d<0$?



Dans ce cas là on a un phénomène d'agregation ou concentration.

2 conditions pour x (conditions aux bords)

ordre 2 en x

1 condition initiale

ordre 1 en t

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = d \cdot \Delta u(t,x)$$

1. Condition initiale

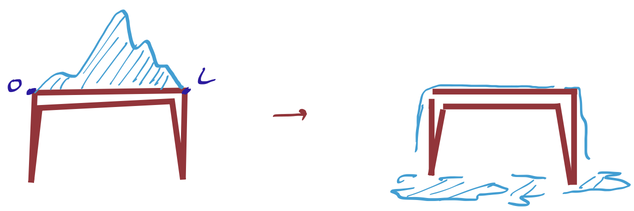
Pour que le problème soit complet, il est necessaire de preciser ce qu'on appelle les conditions aux limites : la condition initiale et les conditions aux bords.

Pour la condition initiale on definit de façon arbitraire $u(0,x) = f(x)$ (car f est donnée par l'expérimentateur) et $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ (en général $x \in [0,L]$).

2. Les conditions au bords

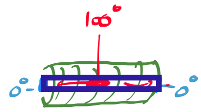
Il existe plusieurs types de conditions aux bords. Nous allons considérer seulement les 2 plus "classiques". Dans ce qui suit on suppose $x \in [0,L]$ (dimension 1) avec $L > 0$.

a. Condition de DIRICHLET homogène



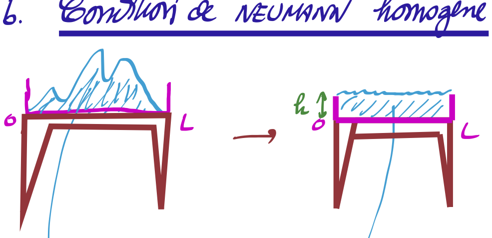
$x \in [0,L]$ $\quad u(t,x)$

$$\boxed{u(t,0) = u(t,L) = 0}$$



$$\lim_{t \to +\infty} u(t,x) = 0$$

b. Condition de NEUMANN homogène



$$\frac{\partial}{\partial x} u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,L) = 0 \quad \text{(flux nul aux bords)}$$

conséquence: la masse est conservée
la chaleur

$$\int^{L} u(t,x)\,dx = L \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{L}\int_0^L u(t,x)\,dx$$

$\frac{1}{L}\int_0 u(t,x)\,dx$

Le problème est alors complet :

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x) & , t \geq 0 \text{ et } x \in [0,L] \\ + \quad u(0,x) = f(x) & , x \in [0,L] \\ + \quad \text{conditions aux bords} \begin{smallmatrix} \nearrow \text{DIRICHLET} \\ \searrow \text{NEUMANN} \end{smallmatrix} & \end{cases}$$

Comment peut on résoudre ce système ?

Pour ça on introduit un nouvel outil mathématique : les fonctions propres

3. Les fonctions propres

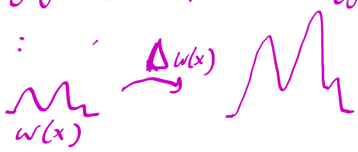
3. Les fonctions propres

Définition : une fonction propre de l'opérateur de diffusion Δ (avec conditions aux bords) est une fonction qui ne dépend que de x (x : variable d'espace) (on l'appelle aussi forme ou profil spatial) que l'on note $w : x \mapsto w(x)$ et qui vérifie :

1. w est dérivable au moins 2 fois
2. $\Delta w(x) = \lambda w(x)$ où λ est une constante (qu'on appellera valeur propre)
3. $w \not\equiv 0$ (w n'est pas identiquement nulle – c'est à dire pas nulle partout)
4. w vérifie les conditions aux bords
5. w est défini à une constante multiplicative près

Remarque : la condition 2. signifie que l'opérateur de diffusion "amplifie" ou "réduit" (amortit) la forme $w(x)$:

exemple :



(la forme ne change pas !) elle est juste amplifiée ou amortie)

Exercice : on considère $x \in [0, L]$ avec $L>0$, et donc

$$\Delta u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

Pour les fonctions propres w on aura : $\Delta w(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underbrace{w(x)}_{\text{que } x} = w''(x)$

On considère les conditions de DIRICHLET homogène en 0 et L : c'est à dire $w(0) = w(L) = 0$

Question : quelle est l'expression de la (ou des) fonctions propres associées à ces conditions ? Autrement dit cherchons w.

Solution : On cherche w une fonction 2 fois dérivable (au moins), non nulle partout ; qui vérifie : $\Delta w(x) = \boxed{w''(x) = \lambda w(x)}$ (2) avec $w(0) = w(L) = 0$

pour tout $x \in [0, L]$

w vérifie l'équation différentielle : $w''(x) = \lambda w(x)$ pour tout $x \in [0, L]$.

Rappel : on cherche les solutions sous la forme $w(x) = e^{rx}$ (avec r constante, complexe)

on obtient : $w'(x) = r e^{rx}$ $\qquad ((e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)})$

et $w''(x) = r^2 e^{rx}$

et donc $w''(x) = \lambda w(x)$ s'écrit $\boxed{r^2 e^{rx} = \lambda e^{rx}}$ pour tout $x \in [0, L]$

$\Leftrightarrow \boxed{r^2 = \lambda}$ polynôme caractéristique

On a alors plusieurs cas :

1. $\boxed{\text{Si } \lambda > 0}$ $r^2 = \lambda$ a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec

$r_1 = \sqrt{\lambda}$ et $r_2 = -\sqrt{\lambda}$ $\qquad (r_1 = -r_2)$

On a alors 2 solutions : $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$

Il est connu que toutes les solutions w de l'équation $w''(x) = \lambda w(x)$ sont sous la forme

$w(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions aux bords : ici $w(0) = w(L) = 0$ (Dirichlet)

$w(0) = 0$ nous donne : $c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0$

$w(0)=0$ nous donne : $c_1 e^0 + c_2 e^0 = 0 \iff c_1 + c_2 = 0$

$\iff c_1 = -c_2$

Les solutions sont donc données par $w(x) = c_1 e^{r_1 x} - c_1 e^{-r_1 x}$ $(c_1 = -c_2$ et $r_1 = -r_2)$

$w(x) = c_1 \left(e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}\right)$ (*)

La deuxième condition est : $w(L)=0$ autrement dit :

(*) avec $x=L$ $\quad c_1\left(e^{r_1 L} - e^{-r_1 L}\right) = 0 \rightarrow c_1 = 0$ ou $e^{r_1 L} - e^{-r_1 L} = 0 \longrightarrow e^{r_1 L} = e^{-r_1 L}$

$c_1 = 0$: impossible sinon w est nulle partout → pas possible (condition 3)

$\iff r_1 L = -r_1 L$

$\iff 2 r_1 L = 0$: IMPOSSIBLE ($r_1 = \sqrt{\lambda}$, $\lambda > 0$; $L > 0$)

pas de solution pour le cas où $\lambda > 0$.

2 $\boxed{\lambda = 0}$ Dans ce cas là $w''(x) = 0$, alors $w'(x) = c_1$ et $w(x) = c_1 x + c_2$

c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions aux bords :

$w(0) = w(L) = 0$

or $w(0) = 0 \iff c_1 . 0 + c_2 = 0 \iff \boxed{c_2 = 0}$ donc $w(x) = c_1 x$

de plus $w(L) = 0 \iff c_1 . L = 0$ ($L > 0$)

$\downarrow$

$c_1 = 0$ PAS POSSIBLE sinon w est nulle partout

donc pas de solution si $\lambda = 0$

3 $\boxed{\lambda < 0}$ Dans ce cas là on a $r^2 = \lambda$ qui s'écrit $r^2 = -|\lambda| = i^2 |\lambda|$

(avec i imaginaire pure, défini par $i^2 = -1$)

On a alors 2 solutions complexes : $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ et $r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$

Rappel quand $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

alors les solutions $w(x)$ sont données par : $w(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$

Ici $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}$ donc $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{|\lambda|}$

donc $w(x) = e^0 \left(c_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda|}.x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}.x\right)\right)$

$= c_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda|}.x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda|}.x\right)$

c_1 et c_2 sont données par les conditions aux bords.

$w(0) = 0 \iff c_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2 \underbrace{\sin(0)}_{0} = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{c_1 = 0}$ donc $w(x) = c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}.x)$

De plus $w(L) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}.L) = 0 \Leftrightarrow$
- $c_2 = 0$ PAS POSSIBLE sinon w est nulle partout
- $\sin(\sqrt{|\lambda|}.L) = 0$

$\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = k\pi$

$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{|\lambda|}}_{>0}.\underbrace{L}_{>0} = \underbrace{k\pi}_{>0}, \quad k \in \mathbb{Z}$

il faut $k > 0$ càd $\boxed{k \in \mathbb{N}^*}$ $= \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Conclusion : On a une infinité de fonctions propres données par

$w(x) = c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}\cdot x)$ on peut prendre $c_2 = 1$ sans perte de généralité

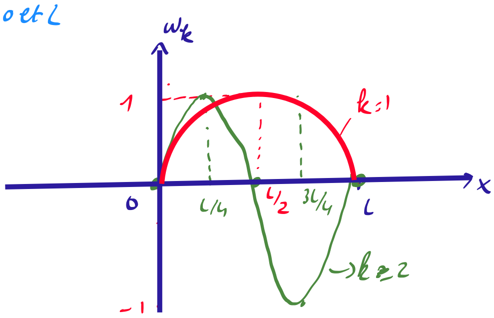
De plus $\sqrt{|\lambda|} = \frac{k\pi}{L}$ et on a donc $|\lambda| = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}^*$

$\lambda < 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2}$

$$\boxed{w_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \text{ et } \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}^*}$$

fonctions propres de Δ avec Dirichlet homogène en 0 et L

valeurs propres associées à w_k.



$k=1 \quad w_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

$x = L/2 \quad \sin\left(\frac{\pi . L}{L . 2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$k=2 \quad w_2(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

$x = L/2 \quad \sin\left(\frac{2\pi L}{2L}\right) = \sin(\pi)$

$x = L/4 \quad \sin\left(\frac{2\pi L}{4 . L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$x = 3L/4 \quad \sin\left(\frac{2\pi . 3L}{4L}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Remarque : on dit que k est la fréquence (nombre d'oscillations) des fonctions propres.

Exercice : Quelles sont les fonctions propres et valeurs propres associées pour Δ avec les conditions de NEUMANN homogène

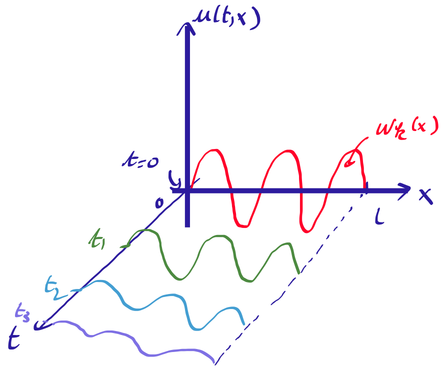
Il faut chercher les w vérifiant $w''(x) = \lambda w(x)$ avec $w'(0) = w'(L) = 0$

4. Résolution de l'équation de la chaleur

On rappelle l'équation : $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d.\,\Delta u(t,x)$

ⓐ Condition initiale est une fonction propre

On suppose que $u(0,x) = w_k(x)$ avec $x \in [0,L]$ $\qquad \Delta w_k(x) = \lambda w_k(x)$



Remarque : avec cette condition initiale, comme $\Delta w_k(x) = \lambda w_k(x)$, au cours du temps les solutions $u(t,x)$ seront des formes dilatées ou amorties de la forme initiale.

On cherche donc les solutions de la forme :

$u(t,x) = \alpha(t).w_k(x)$

(méthode de séparation des variables)

On remplace alors $u(t,x)$ par $\alpha(t)\, w_k(x)$ dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = d\,\Delta u(t,x) \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\alpha(t)\, w_k(x)\right) = d\ \Delta\left(\alpha(t)\, w_k(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad w_k(x) \frac{\partial}{\partial t} \alpha(t) = d\, \alpha(t)\, \Delta w_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad w_k(x).\, \alpha'(t) = d\, \alpha(t).\, \lambda_k .\, w_k(x)$$

pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \in [0,L]$
$w_k(x)$ n'est pas nul partout

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{w_k(x)}_{\neq 0 \text{ partout}}\left(\alpha'(t) - d.\lambda_k \alpha(t)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha'(t) - d\lambda_k\, \alpha(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha'(t) = d\lambda_k\, \alpha(t)$$

donc $\boxed{\alpha(t) = c\, e^{d.\lambda_k t}}$ avec Dirichlet $\lambda_k < 0$, $d > 0$

Rappel : $y'(t) = a\,y(t)$
alors $y(t) = c.\,e^{at}$
$\hookrightarrow y'(t) = c.\,e^{at}.\,a$

Conclusion : si la condition initiale est une fonction propre w_k, alors les solutions de l'équation de la chaleur sont données par :

$$\boxed{u(t,x)} = \alpha(t)\, w_k(x) = \boxed{c.\, e^{d\lambda_k t}\, w_k(x)}$$

Que vaut c ? . quand $t=0$ $u(0,x) = c.e^{0} w_k(x)$ or la condition initiale est $u(0,x) = w_k(x)$

$= c.w_k(x)$

Ici $\boxed{c=1}$

donc $u(t,x) = e^{d\lambda_k t} w_k(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$d>0$, $\lambda_k<0$, $-1 \leq w_k(x) \leq 1$ Dirichlet (BORNÉ)

Remarque : de façon générale, les λ_k seront toujours ≤ 0 et on les numérote de la façon suivante : $\dots \leq \lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 \leq 0 = \lambda_0$

. les w_k seront bornées

Par conséquent on aura toujours $u(t,x) = e^{d\lambda_k t} w_k(x) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (si $\lambda_k<0$)

c^{te} si $\lambda_k=0$

b <u>Condition initiale</u> : combinaison de 2 fonctions propres

On suppose $u(0,x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} w_{k_2}(x)$, $x \in [0,L]$, k_1 et $k_2 \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) et $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in \mathbb{R}$

Par le principe de superposition, les solutions $u(t,x)$ sont données par la combinaison des solutions quand la condition initiale est une seule de ces valeurs propres des solutions quand la condition initiale est une seule de ces valeurs propres

$$u_1(0,x) = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) \longrightarrow u_1(t,x) = \alpha_{k_1} e^{d\cdot\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x)$$

$$+ \quad u_2(0,x) = \alpha_{k_2} w_{k_2}(x) \longrightarrow u_2(t,x) = \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$$

$$u(0,x) = u_1(0,x) + u_2(0,x) \longrightarrow u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

$$= \alpha_{k_1} e^{d\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) + \alpha_{k_2} e^{d\lambda_{k_2} t} w_{k_2}(x)$$

<u>Remarque</u> : de façon générale, par le principe de superposition si la condition initiale est la combinaison linéaire de N fonctions-propres :

$$\left(\text{c'est à dire} \quad u(0,x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{k_i} w_{k_i}(x) \right)$$

alors $$\boxed{u(t,x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{k_i} e^{d\lambda_{k_i} t} w_{k_i}(x)}$$

<u>Exercice</u> : On considère l'équation de la chaleur $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \Delta u(t,x)$, $t \geq 0$ et $x \in [0,\pi]$ $(L = \pi)$ qui satisfait les conditions aux bords de

et $x \in [0,\pi]$ $(L=\pi)$ qui satisfait les conditions aux bords de Neumann homogène.

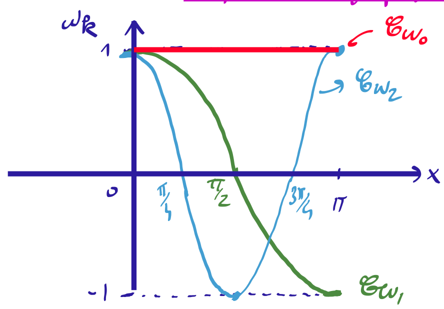
1. Déterminer les fonctions propres et les valeurs propres associées de Δ pour ces conditions aux bords
2. Dessiner les 3 premières fonctions propres
3. On suppose la condition initiale suivante $u(0,x) = 3 + 2\cos(x) + 5\cos(3x)$
   a. Résoudre l'équation de la chaleur si $d = 1$
   b. Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t,x)$.

Solution : 1. Les fonctions propres de Δ pour les conditions de Neumann sont données par $w_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ avec $x \in [0,L]$

de valeur propre associée $\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ avec $k \in \mathbb{N}$

Ici $x \in [0,\pi]$ donc $L=\pi$, et ainsi $\boxed{w_k(x) = \cos(kx) \text{ et } \lambda_k = -k^2 \,,\ k \in \mathbb{N}}$

2. Représentation graphique des 3 premières fonctions propres



$k=0$ $\quad w_0(x) = \cos(0) = 1$

$k=1$ $\quad w_1(x) = \cos(x)$

$k=2$ $\quad w_2(x) = \cos(2x)$

$x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$

3. La condition initiale est $u(0,x) = 3 + 2\cos(x) + 5\cos(3x)$

a. D'après le cours, si $\boxed{u(0,x)} = \alpha_{k_1} w_{k_1}(x) \underset{\substack{\text{ici} \\ \text{sur } [0,\pi] \\ + \text{Neumann}}}{=} \boxed{\alpha_{k_1} . \cos(k_1 x)}$

$\lambda_k = -k^2$

Alors la solution est donnée par $\boxed{u(t,x)} = \alpha_{k_1} e^{d.\lambda_{k_1} t} w_{k_1}(x) = \boxed{\alpha_{k_1} e^{-d.k_1^2 t} \cos(k_1 x)}$

Avec $d=1$

Ici $u(0,x) = 3 + 2\cos(x) + 5\cos(3x) = u_1(0,x) + u_2(0,x) + u_3(0,x)$ $\quad x \in [0,\pi]$

- pour $\boxed{u_1(0,x) = 3}$. On a $u_1(0,x) = 3 = 3 \times 1 = 3 \times \cos(0x) = 3 w_0(x)$

Donc $u_1(t,x) = 3 e^{-0^2 t}$ $\quad \square$

Donc $u_1(t,x) = 3e^{-0^2 t}\cos(0x) = \boxed{3}$

$\uparrow k=0, \alpha=1$

- pour $\boxed{u_2(0,x) = 2\cos(x)}$ On a $u_2(0,x) = 2\cos(1.x)$ $k=1$ $\alpha=2$

$= 2w_1(x)$

Donc $u_2(t,x) = 2e^{-1^2 t}\cos(x) = \boxed{2e^{-t}\cos(x)}$

- pour $\boxed{u_3(0,x) = 5\cos(3x)}$ On a $u_3(0,x) = 5\cos(3.x)$ $\alpha=5$ $k=3$

Donc $\boxed{u_3(t,x) = 5e^{-9t}\cos(3x)}$

Par le principe de superposition si $u(0,x) = u_1(0,x) + u_2(0,x) + u_3(0,x)$

alors $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x)$

$= \boxed{3 + 2e^{-t}\cos(x) + 5e^{-9t}\cos(3x)}$

b. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = ?$

$\lim\limits_{t\to+\infty} u_1(t,x) = \lim\limits_{t\to+\infty} 3 = 3$ $k=0$

borné

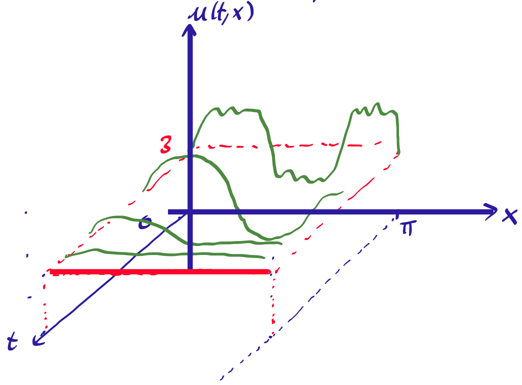
$\lim\limits_{t\to+\infty} u_2(t,x) = \lim\limits_{t\to+\infty} 2e^{-t}\cos(x) = 0$ $k=1$

$\lim\limits_{t\to+\infty} u_3(t,x) = \lim\limits_{t\to+\infty} 5e^{-9t}\cos(3x) = 0$ $k=3$

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = \lim\limits_{t\to+\infty} (u_1(t,x) + u_2(t,x) + u_3(t,x)) = 3+0+0 = \boxed{3}$

Remarque On remarque que, plus la fréquence k est grande, plus

Remarque On remarque que, plus la fréquence k est grande, plus $\lim_{t\to+\infty} e^{-kt} \to 0$ rapidement. Autrement dit, la solution "s'aplatit" plus vite pour les fréquences les plus hautes.



c. Condition initiale : une fonction f quelconque

On suppose maintenant que $u(0,x) = f(x)$ f quelconque (connue ↳ donnée)

On cherche quand même à se ramener au cas où f est une combinaison linéaire des fonctions propres (c'est à dire une combinaison de sinus et cosinus)

Cette idée est la BASE de la théorie des SÉRIES DE FOURIER

Théorème : sur $[0,L]$

Toute fonction f, L-périodique et de carré intégrable sur $[0,L]$ $\left(\int_0^L f^2(x)dx < +\infty \text{ existe}\right)$

se décompose comme une somme infinie de cosinus et sinus

de la façon suivante : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$

Les coefficients a_k et b_k sont appelés coefficients de Fourier et on peut les calculer en fonction de f (il existe des formules pour ça)

Remarque 1. en mathématiques une somme infinie est appelée SÉRIE

c'est défini comme la limite en $+\infty$ de sommes finies.

On doit alors étudier sa convergence. La condition "f de carré intégrable sur $[0,L]$" suffit à avoir cette convergence.

2. Ainsi si $u(0,x) = f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$

$$\sum_{k=0} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

- alors la solution est donnée par :

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k e^{-d\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k e^{-d\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

III Equation de réaction-diffusion

Un système de réaction-diffusion est de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \boxed{f(u(t,x), v(t,x))} + \boxed{d_u \Delta u(t,x)} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \boxed{g(u(t,x), v(t,x))} + \boxed{d_v \Delta v(t,x)} \end{cases}$$

REACTION DIFFUSION

il y a deux quantités : u et v qui se diffusent

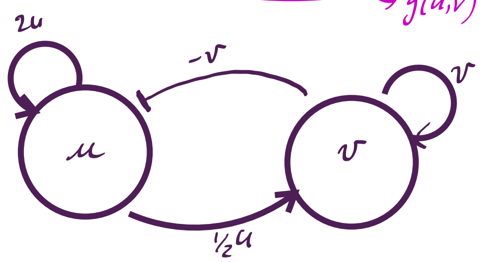
. leurs coefficient de diffusion d_u et $d_v > 0$ peut être différent

. les fonctions f et g constituent la partie réaction du modèle

elles décrivent le bilan entre production et destruction de u et v en (t,x)

Exemple :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \overbrace{2u(t,x) - v(t,x)}^{f(u,v)} + d_u \Delta u(t,x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} v(t,x) = \underbrace{v(t,x) + \tfrac{1}{2} u(t,x)}_{g(u,v)} + d_v \Delta v(t,x) \end{cases}$$



Comment étudier ce type de modèle ? mauvaise nouvelle : on ne peut pas donner de formulation explicite des solutions de ce type de système en général.

On étudie alors les équilibres et leurs stabilité.

équilibres et leurs stabilité.

1. **Une seule équation de réaction diffusion**

Etudions l'équation: $\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = f(u(t,x)) + d \Delta u(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \underbrace{f(u(t,x))}_{\text{réaction}} + \underbrace{d\,\Delta u(t,x)}_{\text{diffusion}}$$

$\boxed{\text{Etape 1}}$: recherche des équilibres

On recherche les équilibres stationnaires (indépendants de t) et homogènes en espace (indépendants de x) de la forme u^* où u^* est une constante.

comme u^* est constant on a $\frac{\partial}{\partial t}u^* = 0$ et $\Delta u^* = 0$

il nous reste $0 = f(u^*) + 0$ c'est à dire $\boxed{f(u^*) = 0}$

$\boxed{\text{Etape 2}}$: recherche de la stabilité

Pour étudier la stabilité, on perturbe l'équilibre : on pose $u(t,x) = u^* + u_p(t,x)$

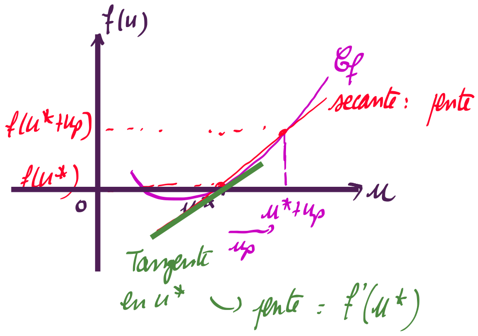
On remplace dans l'équation : $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = f(u(t,x)) + d\,\Delta u(t,x)$

ce qui donne $\frac{\partial}{\partial t}(u^* + u_p(t,x)) = f(u^* + u_p(t,x)) + d\,\Delta(u^* + u_p(t,x))$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}u^*}_{=0} + \frac{\partial}{\partial t}u_p(t,x) = f(u^* + u_p(t,x)) + d\left(\underbrace{\Delta u^*}_{=0} + \Delta u_p(t,x)\right)$$

Il reste $\frac{\partial}{\partial t}u_p(t,x) = f(u^* + u_p(t,x)) + d\,\Delta u_p(t,x)$

On linéarise f autour de u^* $\quad f(u^* + u_p(t,x)) \simeq f'(u^*).u_p(t,x)$



$$\frac{f(u^*+u_p) - \overbrace{f(u^*)}^{0}}{u^* + u_p - u^*} = \frac{f(u^*+u_p)}{u_p}$$

linéariser

$$\frac{f(u^*+u_p)}{u_p} \sim f'(u^*)$$

$$f(u^*+u_p) \sim f'(u^*)u_p.$$