13 janvier 2025

Laurent PUJO-MENJOUET
pujo@math.univ-lyon1.fr
DOUA - BRACONNIER - BUREAU 246

Etude qualitative de systèmes de 2 équations différentielles autonomes d'ordre 1.

I Introduction

Dans tout ce cours, nous étudierons les systèmes d'équations différentielles ordinaires (edo) de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{où } t \in I \subset \mathbb{R}$$

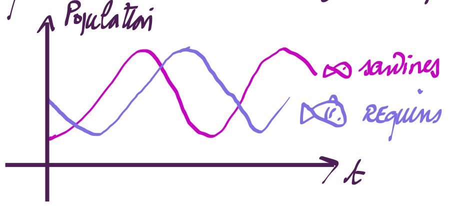
De façon plus "claire" on notera

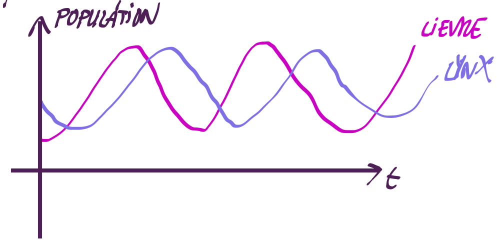
$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

avec pour condition initiale (quand on en aura besoin) $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ $t_0 \in I$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

en général $t_0 = 0$.

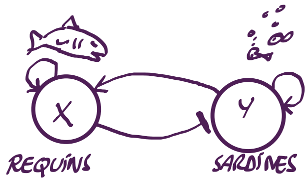
__Exemples__ : 1. (Ecologie) équations de proie et prédateurs : LOTKA-VOLTERRA





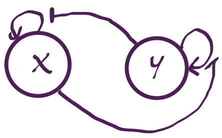
HUDSON BAY COMPANY

modèle mathématique



$$\begin{cases} x'(t) = \overbrace{\underline{a\,x(t)y(t)}}^{\text{les requins mangent les sardines}} - \overbrace{\underline{b\,x(t)}}^{\text{mortalité des requins}} \\ y'(t) = \underbrace{c\,y(t)}_{\text{croissance des sardines}} - \underbrace{d\,x(t)y(t)}_{\text{mortalité des sardines due aux requins}} \end{cases} \qquad a,b,c,d \geq 0$$

2. Equations de compétition



<u>Rappel</u> : CROISSANCE LOGISTIQUE (VERHULST)

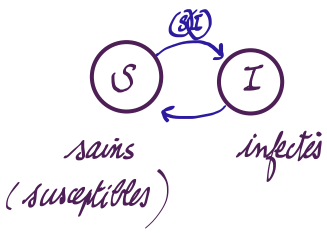
$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$x'(t) = r_1\, x(t)\left(1 - \frac{x(t) + a\,y(t)}{K_1}\right)$$

$$y'(t) = r_2\, y(t)\left(1 - \frac{y(t) + b\,x(t)}{K_2}\right)$$

- modèles de symbiose
- modèles de commensalisme

3. Modèle d'épidémologie



$$\begin{cases} S'(t) = -a\,S(t)I(t) + b\,I(t) \\ I'(t) = a\,S(t)I(t) - b\,I(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{S'(t) + I'(t)}_{(S+I)'(t)\,=\,0} = 0 \quad \Rightarrow \quad S(t)+I(t) = \underset{\text{constante}}{N}$$

<u>Question</u> : comment étudier ces équations?

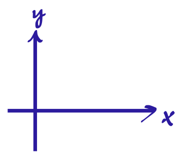
En général on ne peut pas les résoudre "à la main" c'est à dire qu'on ne peut pas trouver de solution explicite (on ne peut pas faire d'étude QUANTITATIVE).

Il faut alors attaquer le problème sous un autre angle: l'étude des équilibres, et de leur stabilité) (c'est ce qu'on appelle une étude QUALITATIVE).

Pour ça nous allons devoir rappeler quelques notions mathématiques: les vecteurs et les matrices.

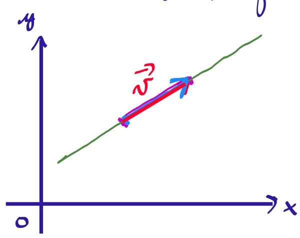
II Vecteurs et matrices en dimension 2

1. Vecteurs en dimension 2 (dans $\mathbb{R}^2$)



$$\underset{\substack{\uparrow\\ (x,}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\uparrow\\ y)}}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$$

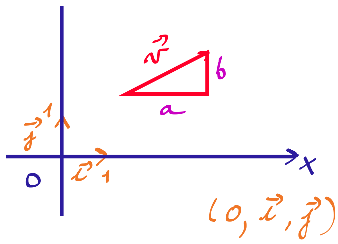
$\vec{v}$: un vecteur de $\mathbb{R}^2$ est défini par :



- sa longueur : $\|\vec{v}\|$ (NORME)
- sa direction (support, droite sur laquelle le vecteur se trouve)
- son sens

Remarque : • le vecteur peut également être défini par ses composants (ses coordonnées)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

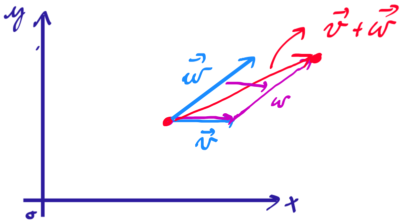


$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$

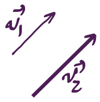
$(O, \vec{i}, \vec{j})$ $\qquad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

- La somme de 2 vecteurs est aussi un vecteur !

Elle se construit de la façon suivante :



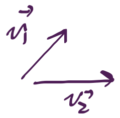
<u>Propriété</u> : Deux vecteurs sont <u>linéairement indépendants</u> si et seulement si $k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 = 0$ alors $k_1 = k_2 = 0$ (les directions de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas parallèles)



$\boxed{\vec{v}_2 = \frac{3}{2}\vec{v}_1}$ alors $2\vec{v}_2 = 3\vec{v}_1$

$\Leftrightarrow \boxed{3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 = 0}$ mais 3 et -2 sont $\neq 0$

→ pas linéairement indépendants



$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ linéairement indépendants

2. Matrices (en dimension 2)   matrices 2×2

Définition : Une matrice réelle (à coefficients réels) est un tableau constitué de 2 lignes et 2 colonnes

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{ligne } 1 \\ \to \text{ligne } 2 \end{array}$$

colonne 1 colonne 2

3. Opérations entre matrices et vecteurs

Notons $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Que vaut $M\vec{v}$:

$$\vec{M}\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \quad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

le résultat est un vecteur

Attention ! le produit n'est pas COMMUTATIF ! (càd $x.y \neq y.x$)

Ici $M.\vec{v} \neq \vec{v}.M$!!

pas possible

vecteur transposé : si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ alors $\vec{v}^T = (x_1 \; x_2)$

Dans ce cas $\vec{v}^T . M = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ (x_1 \; x_2) & (ax_1 + cx_2 \quad bx_1 + dx_2) \end{array}$$

4. Trace et déterminant d'une matrice

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ trace $(A) = a + d$ (sommes des éléments de la première diagonale)

déterminant $(A) = \det(A) = ad - cb$

Exercice : calculer la trace et le déterminant de :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

trace $(A) = 1 + 4 = \boxed{5}$

$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = \boxed{-2}$

tr $(B) = 6 - 2 = \boxed{4}$

$\det(B) = 6 \times (-2) - 3 \times (-1) = -12 + 3 = \boxed{-9}$

tr$(C) = 3 + 7 = \boxed{10}$

$\det(C) = 3 \times 7 - 0.0 = \boxed{21}$

5. Comment résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues (avec les vecteurs et les matrices)

On considère le système suivant : $(S)\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k_1 & (1) \\ cx_1 + dx_2 = k_2 & (2) \end{cases}$

Objectif : trouver x_1 et x_2 (les inconnues) en fonction de a, b, c, d, k_1 et $k_2 \in \mathbb{R}$ (données)

CAS 1 • $\boxed{\text{si } c = 0}$ $\quad ax_1 + bx_2 = k_1$

$dx_2 = k_2$ → si $d = 0$ ↗ si $k_2 = 0$ une infinité de solutions (on peut prendre ce qu'on veut pour x_2)

↘ si $k_2 \neq 0$ $0 = k_2$: pas possible

→ $\boxed{\text{si } d \neq 0}$ $x_2 = \frac{k_2}{d}$ on remplace dans (1)

$ax_1 + b\frac{k_2}{d} = k_1 \Rightarrow ax_1 = k_1 - \frac{bk_2}{d}$

→ si $a = 0$ ↗ si $k_1 - \frac{bk_2}{d} = 0$ une infinité de solutions

↘ si $k_1 - \frac{bk_2}{d} \neq 0$ aucune solution

→ si $\boxed{a \neq 0}$ $x_1 = \frac{k_1 - bk_2/d}{a}$

• $\boxed{\text{si } c \neq 0}$ on utilise la méthode du PIVOT DE GAUSS :

$\begin{vmatrix} x & x \\ x & x \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & x \\ & x \end{vmatrix} \neq 0$

Méthode : On cherche à éliminer x_1 dans la ligne 2.

Pour ça : on a $\quad ax_1 + bx_2 = k_1 \quad (1)$

$cx_1 + dx_2 = k_2 \quad \left((2) \times \left(-\frac{a}{c}\right)\right)$

on obtient : $\begin{cases} (1) & ax_1 + bx_2 = k_1 \\ (2)' & -ax_1 - \frac{a}{c}dx_2 = -\frac{a}{c}k_2 \end{cases}$

$(2)\ -ax_1 - \frac{a}{c} d x_2 = -\frac{a}{c} k_2$

On ajoute ensuite les lignes (1) et (2') : $(1)\ ax_1 + bx_2 = k_2$

$(2'') = (1) + (2') : 0 + \left(b - \frac{a}{c}d\right) x_2 = k_1 - \frac{a}{c} k_2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{bc - ad}{c}\right) x_2 = \left(\frac{k_1 c - a k_2}{c}\right)$

$\Leftrightarrow (bc - ad)\, x_2 = (k_1 c - a k_2)$

si on suppose $\boxed{bc - ad \neq 0}$ $\quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \left(\frac{k_1 c - a k_2}{bc - ad}\right)$

$\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Pour résumer $\boxed{x_2} = \boxed{\frac{k_1 c - a k_2}{bc - ad}}$ avec $\det(A) \neq 0$ $\quad (\det(A) = ad - bc)$

$= \frac{k_1 c - a k_2}{-\det(A)} = \frac{-(k_1 c - a k_2)}{\det(A)} = \boxed{\frac{-k_1 c + a k_2}{\det(A)}}$ ✓

On cherche x_1 en se servant de la ligne (1) : $ax_1 + b\underbrace{x_2}_{\frac{-k_1 c + a k_2}{\det(A)}} = k_1\ (1)$

$(1) \Leftrightarrow ax_1 + b\left(\frac{-k_1 c + a k_2}{\det A}\right) = k_1$

$\Leftrightarrow ax_1 = k_1 + b \frac{-k_1 c + a k_2}{bc - ad} \rightarrow \det(A)$

$\Leftrightarrow a x_1 = \frac{\cancel{k_1 bc} - k_1 ad - \cancel{b k_1 c} + b.a k_2}{bc - ad}$

$\Leftrightarrow \cancel{a} x_1 = \frac{-k_1 ad + k_2 ab}{bc - ad} = \frac{\cancel{a}(-k_1 d + k_2 b)}{bc - ad}$

$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-k_1 d + k_2 b}{bc - ad} = \frac{-k_1 d + k_2 b}{-\det(A)} = \frac{-(-k_1 d + k_2 b)}{\det(A)} = \frac{k_1 d - k_2 b}{\det(A)}$

La solution de ce système si $c \neq 0$ et si $\det(A) = 0$ est alors le vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 d - k_2 b}{\det A} \\ \frac{-k_1 c + k_2 a}{\det A} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} k_1 d - k_2 b \\ -k_1 c + k_2 a \end{pmatrix}$$

Rappel : $\begin{pmatrix} k x_1 \\ k x_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

On rappelle que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

Que vaut AX ? : $\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}}$

Exercice : Calculer $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dk_1 - bk_2 \\ -ck_1 + ak_2 \end{pmatrix}$

on $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} k_1 d - k_2 b \\ -k_1 c + k_2 a \end{pmatrix}$ donc on peut écrire $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

Remarque : on note $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ la matrice adjointe de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \to A'$$
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Par conséquent, résoudre
$$\begin{aligned} (1)\quad & ax_1 + bx_2 = k_1 \\ (2)\quad & cx_1 + dx_2 = k_2 \end{aligned}$$

revient à écrire le problème sous la forme $AX = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

et la solution de ce problème s'écrit

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot A'\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ si on pose } K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

on a la résolution du système $AX = K$ s'écrit $\boxed{X = \frac{1}{\det A} \cdot A'K}$

En mathématique, quand $\det(A) \neq 0$ on écrit note $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A'}$ (l'inverse de A)

donc $AX = K \iff \boxed{X = A^{-1}K}$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ A^{-1} : matrice inverse

A' : " adjointe

adjointe

Exercice : en utilisant les notations de vecteur et de matrice donner la solution du système suivant

$$(S)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$A' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 4\times 1 - 3\times 2 = 4 - 6 = -2$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A' = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$K = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $X = A^{-1}K = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 - 10 \\ -12 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\boxed{X} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \end{pmatrix}$

$\big)\big(\quad \big) = \big(-7 \big)$ $\qquad \boxed{X} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \end{pmatrix}}$

<u>Exercice</u> : Comment résoudre $AX = \lambda X$ (λ : LAMBDA (nombre))

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\Big)$

On suppose que $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$AX = \lambda X \Leftrightarrow \underbrace{AX}_{\text{vecteur}} - \underbrace{\lambda X}_{\text{vecteur}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

matrice — nombre

Remarque si on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identité)

que vaut λX ? $\rightarrow \lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

que vaut $\lambda . I . X$?

$\hookrightarrow \lambda IX = \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$= \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

$\left(\lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

égaux

ASTUCE ici : on écrit $AX - \lambda X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX - \lambda IX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I) X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

matrice — matrice

Calculons $A - \lambda I$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a-\lambda & b-0 \\ c-0 & d-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$

Conclusion : résoudre $\boxed{AX = \lambda X}$ revient à résoudre $\boxed{\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

On rappelle que par hypothèse $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a alors le système suivant :

$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ que l'on peut écrire $\begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 & (1) \\ c\, x_1 + (d-\lambda)x_2 = 0 & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ cx_1 = -(d-\lambda)x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ x_1 = \dfrac{-(d-\lambda)}{c} x_2 \quad (2') \end{cases}$ (on isole x_1 dans (2))

on suppose $c \neq 0$

On remplace ensuite x_1 par cette valeur dans (1) :

$(a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda) . \left(-\dfrac{(d-\lambda)}{c}\right) x_2 + bx_2 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{c}\left(-(a-\lambda)(d-\lambda)\right) x_2 + \dfrac{cb}{c} x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\dfrac{1}{c}}_{\neq 0} \left(-(a-\lambda)(d-\lambda) + cb\right) \underbrace{x_2}_{x_2 \neq 0 \text{ par hypothèse}} = 0$ $\left(\text{car } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow -(a-\lambda)(d-\lambda) + cb = 0$

$$\Leftrightarrow -(a-\lambda)(d-\lambda)+cb=0$$

$$\Leftrightarrow cb-(a-\lambda)(d-\lambda)=0 \Leftrightarrow -\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$$

or on remarque $\det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=(a-\lambda)(d-\lambda)-cb$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=0$$

<u>Rappel</u> : $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\lambda I=A-\lambda I$ $\Leftrightarrow \boxed{\det(A-\lambda I)=0}$

III Systèmes d'équations différentielles

On considère le système d'équations différentielles linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} x_1'(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \\ x_2'(t) = c x_1(t) + d x_2(t) \end{cases}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$X'(t) = A \cdot X(t) \qquad \text{avec } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Rappel : en L2 ($2^{ème}$ de Licence LSPS) on a vu que la solution de l'équation

$x'(t) = ax(t)$ était $\boxed{x(t) = ce^{at}}$

Idée : l'idée est de chercher les solutions de $X'(t) = AX(t)$ sous la forme $X(t) = e^{\lambda t} V$

où λ est un nombre et V est un vecteur $\left(V \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sinon } X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Attention : ici λ peut être un nombre réel ou complexe $\hookrightarrow \lambda = \alpha + i\beta$, i.t.q $i^2 = -1$)

et V est un vecteur de coordonnées réelles ou complexes

SPOILER : on devrait trouver à chaque fois 2 valeurs λ_1 et λ_2 et 2 vecteurs V_1 et V_2 non nuls !

Comment est-ce que l'on fait ?

l'équation est $X'(t) = AX(t)$ on cherche les solutions sous la forme

$$X(t) = e^{\lambda t} V \rightarrow V \text{ ne dépend pas de } t$$

que vaut $X'(t)$?

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V$$

Rappel : $\left(e^{u(t)}\right)' = u'(t) e^{u(t)}$

ici $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$

On remplace X et X' dans l'équation :

$$X'(t) = A.X(t) \Leftrightarrow \lambda \cancel{e^{\lambda t}} V = A . \cancel{e^{\lambda t}} V \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda V = AV$$

On doit donc résoudre $\boxed{AV = \lambda V}$ d'après ce qui précède c'est équivalent à résoudre

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ alors $A - \lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$

Que vaut $\det(A - \lambda I) = 0$?

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$tr(A) = a + d$

$\det(A) = ad - bc$

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0} \Leftrightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow ad - a\lambda - \lambda d + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = 0}$$