

- 5 JANVIER 2026 -
CM 1

Etude qualitative de systèmes de 2 équations différentielles autonomes d'ordre 1

I Introduction

Dans tout ce cours, nous étudierons les systèmes d'équations différentielles ordinaires (edo) de la forme:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{où } t \in I \subset \mathbb{R} \quad (t \geq 0)$$

De façon "plus claire" on notera

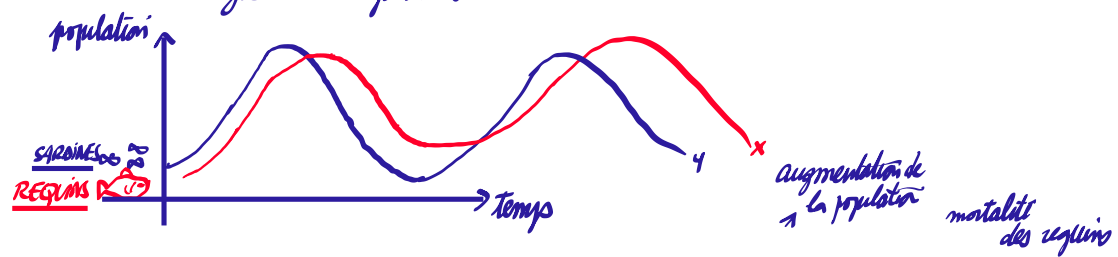
$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

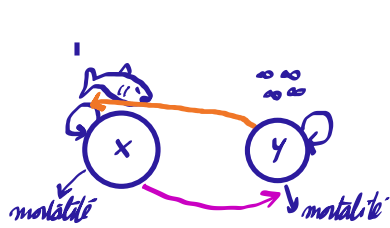
on pourra également prendre des conditions initiales qui on notera

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{la plupart du temps on prendra } t_0 = 0)$$

Exemples :

1. Ecologie : Équations de PROIES ET PRÉDATEURS : LOTKA - VOLTERRA.





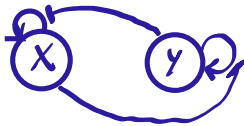
Temps

Requins $x'(t) = a x(t) y(t) - b x(t)$

sardines $y'(t) = c y(t) - d x(t) y(t)$

2. Equation de compétition

Rappel : CROISSANCE LOGISTIQUE (VERHULST)

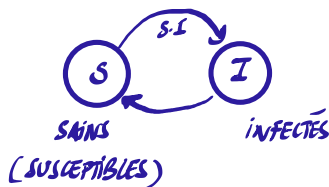


$x' = r_1 x (1 - \frac{x}{K_1})$ compétition avec y

$x'(t) = r_1 x(t) (1 - \frac{x(t) + a y(t)}{K_1})$

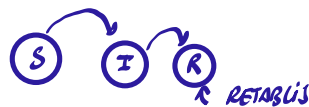
$y'(t) = r_2 y(t) (1 - \frac{y(t) + b x(t)}{K_2})$ compétition avec x

3. Epidémiologie



$S'(t) = -a S(t) I(t) + b I(t)$

$I'(t) = a S(t) I(t) - b I(t)$



Question : comment étudier ces équations ?

En général, on ne peut pas les résoudre "à la main" c'est à dire qu'on ne peut pas trouver des solutions explicites (en mathématique on dit qu'on ne peut pas faire d'étude quantitative du problème).

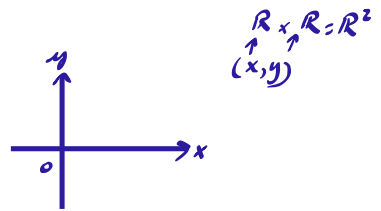
Il faut alors attaquer le problème sous un autre angle :

L'étude des équilibres et de leur stabilité (c'est ce qu'on appelle en mathématique une étude quantitative du problème).

Pour ça nous allons rappeler quelques notions mathématiques : les vecteurs et les matrices

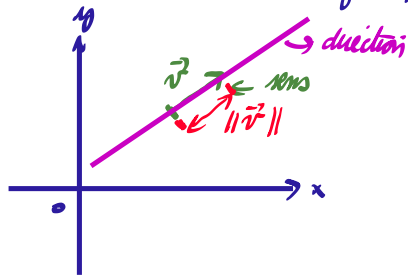
II Vecteurs et matrices en dimension 2

1. Vecteurs en dimension 2 (dans $\mathbb{R}^2$)

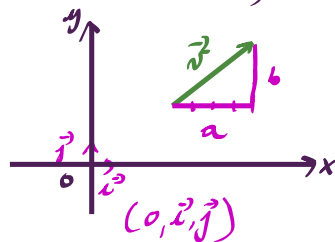


$\vec{v}$: vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est défini par :

- sa longueur : $\|\vec{v}\|$ norme ($\vec{AB}$ longueur AB)
- sa direction : support, droite sur laquelle le vecteur se trouve
- sens

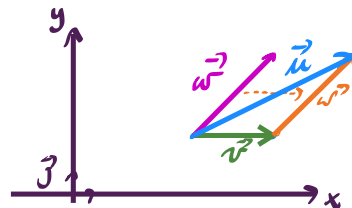


Remarques : 1. le vecteur peut également être défini par ses composantes (ses coordonnées) $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

2. La somme de 2 vecteurs est encore un vecteur



$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$



^

Propriétés : Deux vecteurs sont LINÉAIREMENT INDÉPENDANTS si
et seulement si $k_1 \vec{v}_1 + k_2 \vec{v}_2 = 0$ alors $k_1 = k_2 = 0$
(les directions de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas parallèles)

exemple :



$$\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 \Leftrightarrow -2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 0$$

cas
linéairement dépendants

linéairement indépendants :



2. Matrices (en dimension 2) matrices 2x2

Définition une matrice réelle (c'est à dire à coefficients réels) est un tableau constitué de 2 lignes et de 2 colonnes

exemple : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{ligne 1} \\ \rightarrow \text{ligne 2} \end{matrix}$

$\downarrow \quad \downarrow$
colonne 1 colonne 2

3. Opération entre matrices et vecteurs

Notons $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vecteur et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice

Que vaut $M \cdot \vec{v}$?

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix}$$

Que vaut $M \vec{v}$?

$$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix}$$

$\in$ vecteur

ATTENTION : $M \vec{v} \neq \vec{v} M$ le produit n'est pas commutatif
IMPOSSIBLE (n'a pas de sens)

Définition : vecteur transposé $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{v}^T = (x_1 \ x_2)$
↑
vecteur transposé

Dans ce cas $\vec{v}^T M$ a du sens

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_1 + c x_2 & b x_1 + d x_2 \end{pmatrix}$$

c'est un vecteur transposé

4. TRACE ET DETERMINANT d'une matrice

soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice alors $\text{trace}(A) = a + d$ (somme des éléments de la première diagonale)
 $= \text{tr}(A)$

$$\text{déterminant}(A) = ad - cb$$

$= \det(A)$

Exercice : Calculer la trace et le déterminant de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{tr}(A) = 5 & \text{tr}(B) = 4 & \text{tr}(C) = 10 \\ \det(A) = -2 & \det(B) = -9 & \det(C) = 21 \end{array}$$